

BILANGAN KETERHUBUNGAN PELANGI PADA GRAF GERIGI

*Diah Prastiwi¹, Fendy Septyanto², Sugi Guritman², Teduh Wulandari², Siswandi²

¹Fakultas MIPA Militer, Universitas Pertahanan RI, Kawasan IPSC Sentul, Bogor.
diah.prastiwi@idu.ac.id *corresponding author

²Sekolah Sains Data, Matematika, dan Informatika
Institut Pertanian Bogor, Jl. Meranti, Kampus IPB Dramaga Bogor.
fendy-se@apps.ipb.ac.id, sugigu@apps.ipb.ac.id, teduhma@apps.ipb.ac.id, siswandi@apps.ipb.ac.id

Abstrak

Pewarnaan pelangi pada graf adalah suatu pelabelan sisi dengan sifat bahwa setiap pasang simpul dapat dihubungkan oleh lintasan pelangi (lintasan yang warna/label sisinya berbeda semua). Bilangan keterhubungan pelangi $rc(G)$ adalah banyaknya warna paling sedikit pada pewarnaan pelangi di graf G . Graf gerigi (*gear*) G_n diperoleh dari graf roda (*wheel*) W_n dengan menyisipkan satu simpul pada setiap sisi lingkaran luar. Penelitian sebelumnya menyelidiki $rc(G_n)$ untuk $2 \leq n \leq 8$, sedangkan kasus $n \geq 9$ belum tertangani. Penelitian ini menutup celah tersebut dengan menunjukkan $rc(G_n) = \min\{n, 4\}$ untuk $n \geq 2$.

Kata kunci: Bilangan keterhubungan pelangi, diameter, graf gerigi, pewarnaan

1 Pendahuluan

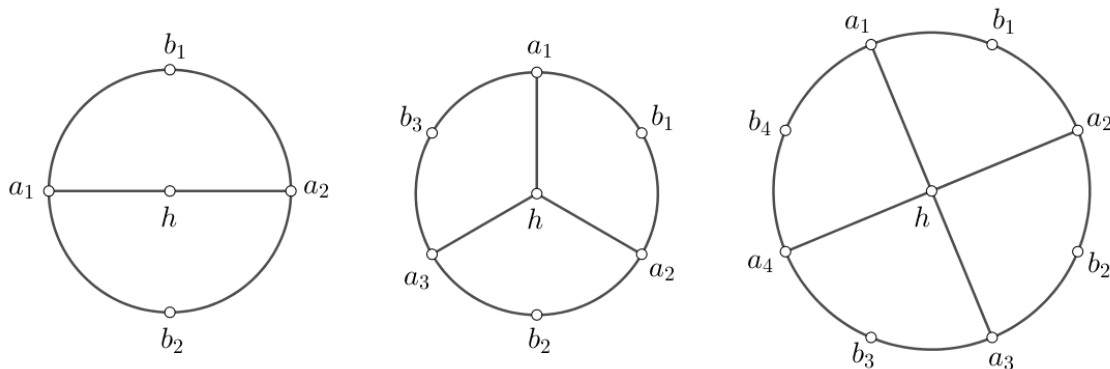
Sejak diperkenalkan oleh Chartrand *et al.* [1] pada tahun 2008, konsep pewarnaan pelangi dan bilangan keterhubungan pelangi sudah menjadi topik yang cukup aktif diteliti. Salah satunya karena banyak problem dasar di topik ini yang kompleksitas komputasinya tinggi (NP-complete) bahkan ketika dipersempit pada kelas graf tertentu, sehingga kemajuan pada topik ini dapat berimplikasi pada dunia komputasi.

Berikut dirangkum beberapa definisi dan hasil dasar. Misalkan G adalah graf hingga, tanpa *loop* maupun sisi berganda. Sembarang pelabelan sisi, yaitu pemetaan $c: E(G) \rightarrow \{1, \dots, k\}$, akan disebut pewarnaan sisi. Sebagai catatan, dua sisi yang insiden boleh diberikan warna yang sama, jadi penggunaan istilah “pewarnaan” di sini lebih rileks dari biasanya. Diasumsikan G non-trivial, yakni G memiliki lebih dari satu simpul, karena jika G hanya memiliki satu simpul maka himpunan sisinya kosong sehingga tidak ada pemetaan $E(G) \rightarrow \{1, \dots, k\}$. Diberikan suatu pewarnaan sisi, sebuah lintasan disebut **lintasan pelangi** (*rainbow path*) apabila warna sisi-sisinya berbeda semua. Pewarnaan sisi tersebut disebut **pewarnaan pelangi** (*rainbow coloring*) apabila untuk setiap pasang simpul berbeda selalu ada lintasan pelangi yang menghubungkan dua simpul tersebut. Bilangan asli terkecil k sehingga ada pewarnaan pelangi $c: E(G) \rightarrow \{1, \dots, k\}$ disebut **bilangan keterhubungan pelangi** (*rainbow connection number*) dari graf G , disimbolkan $rc(G)$.

Secara kompleksitas komputasi, menentukan $rc(G) = 2$ adalah problem yang NP-complete [2], menentukan $rc(G) = 3$ juga NP-complete bahkan ketika dibatasi pada kelas graf bipartit [3]. Untuk setiap $k \geq 3$, problem menentukan $rc(G) \leq k$ adalah NP-complete bahkan ketika dibatasi pada kelas graf *chordal* [4]. Aproksimasi juga sulit dilakukan, tidak ada algoritma dengan kompleksitas polinomial yang dapat mewarnai graf sembarang dengan pewarnaan pelangi dan tidak lebih dari 2 kali jumlah warna optimal, kecuali apabila $P = NP$ [5].

Pada sisi lain, ada banyak penelitian yang berfokus pada kelas graf tertentu, misalnya graf lengkap, graf pohon, siklus, graf roda, dan graf multipartit lengkap [1], graf sirkulan [6], graf garis (*line graph*) [7], dan berbagai *graph products* [8, 9, 10, 11]. Ulasan yang lebih komprehensif dapat dilihat pada survei dinamis [12].

Graf yang menjadi fokus pada penelitian ini adalah graf gerigi (*gear graph*) G_n yang memiliki himpunan simpul $V(G_n) = \{h, a_1, b_1, \dots, a_n, b_n\}$ dan himpunan sisi $E(G_n) = \{ha_i : 1 \leq i \leq n\} \cup \{a_1b_1, b_1a_2, a_2b_2, b_2a_3, \dots, a_nb_n, b_na_1\}$. Graf gerigi G_n memiliki $2n + 1$ buah simpul dan $3n$ buah sisi. Titik h disebut **pusat** (*hub*), sisi ha_i disebut **ruji/jari-jari** (*spoke*), siklus luar $a_1 - b_1 - a_2 - b_2 - \dots - a_n - b_n - a_1$ disebut **pelek** (*velg/rim*), sedangkan siklus dalam $h - a_i - b_i - a_{i+1} - h$ disebut **juring** (*sector*).



Gambar 1. Kiri ke kanan: ilustrasi graf gerigi G_2, G_3, G_4 .

Saat $n \geq 3$, graf gerigi G_n dapat diperoleh dari graf roda W_n dengan menyisipkan satu simpul pada setiap sisi lingkaran luarnya. Meskipun “graf roda” W_2 tidak terdefinisi (akan ada sisi berganda), graf gerigi G_2 tetap terdefinisi dengan baik. Jadi, pada graf gerigi G_n diasumsikan $n \geq 2$.

Secara struktural, graf gerigi merupakan graf bipartit karena tidak memiliki siklus ganjil, berbeda dari graf roda yang memiliki siklus berpanjang 3 sehingga tidak bipartit. Signifikansinya, seperti disebutkan sebelumnya bahwa menentukan bilangan keterhubungan pelangi adalah problem yang sulit secara komputasi, bahkan ketika dibatasi pada kelas graf bipartit [2].

Penelitian sebelumnya [13] mengklaim bilangan keterhubungan pelangi dari graf gerigi G_n adalah 4 untuk $n \geq 4$, tapi pewarnaannya tidak bekerja saat n ganjil. Lebih spesifik, [13] memberikan pewarnaan seperti pada Gambar 3 sebelah kiri: peleknya diwarnai bergantian 1, 2, 2, 1, 1, 2, 2, 1, \dots sedangkan rujinya diwarnai bergantian 3, 4, 3, 4, 3, 4, \dots . Ketika n ganjil, pewarnaan ruji yang bergantian itu mengakibatkan ruji pertama dan terakhir sama-sama diwarnai 3, sedangkan pelek di sekitarnya berwarna 2-1-ruji terakhir-1-2-ruji pertama-1-2. Hal itu mengakibatkan tidak adanya lintasan pelangi antara a_n dan b_1 . Oleh karena itu, pewarnaan pada [13] harus dimodifikasi saat n ganjil.

Kemudian, [14] memberikan pewarnaan yang suboptimal dan akhirnya [15] memberikan pewarnaan optimal tapi hanya pada interval $2 \leq n \leq 8$ sedangkan kasus $n \geq 9$ belum tertangani. Kontribusi utama dari penelitian ini adalah melengkapi bukti untuk semua kasus $n \geq 2$, ganjil maupun genap.

2. Metode Pembuktian

Secara umum, untuk menunjukkan $rc(G) = k$ perlu dilakukan dua hal:

- 1) Pertama, membuktikan batas bawah $rc(G) \geq k$, biasanya dengan menunjukkan bahwa $k - 1$ warna tidak cukup untuk menghasilkan pewarnaan pelangi di G .
- 2) Kedua, membuktikan batas atas $rc(G) \leq k$, biasanya dengan mengkonstruksi suatu pewarnaan pelangi dengan k warna.

Berikut ini batas bawah yang akan digunakan. Panjang suatu lintasan adalah banyaknya sisi pada lintasan tersebut. Geodesik antara $x, y \in V(G)$ adalah sebuah lintasan yang menghubungkan x, y dan panjangnya seminimal mungkin (terpendek). Jarak antara $x, y \in V(G)$, disimbolkan $d(x, y)$, adalah panjang geodesik yang menghubungkan x dan y . Kemudian, diameter graf adalah jarak terbesar di graf tersebut, yakni $diam(G) = \max_{x, y \in V(G)} d(x, y)$.

Lemma 1 (Ketaksamaan (1) di Chartrand *et al.* [1]). *Jika G graf terhubung non-trivial, maka $rc(G) \geq diam(G)$.*

Bukti: Misalkan $c: E(G) \rightarrow \{1, \dots, k\}$ suatu pewarnaan pelangi dengan $k = rc(G)$. Pilih $x, y \in V(G)$ dengan $d(x, y) = diam(G)$. Karena c pewarnaan pelangi, maka ada lintasan pelangi yang menghubungkan x dan y . Panjang lintasan tersebut sedikitnya $d(x, y)$, yakni $diam(G)$. Karena lintasannya pelangi, semua sisinya memiliki warna berbeda. Maka ada sedikitnya $diam(G)$ warna yang digunakan, $k \geq diam(G)$. ■

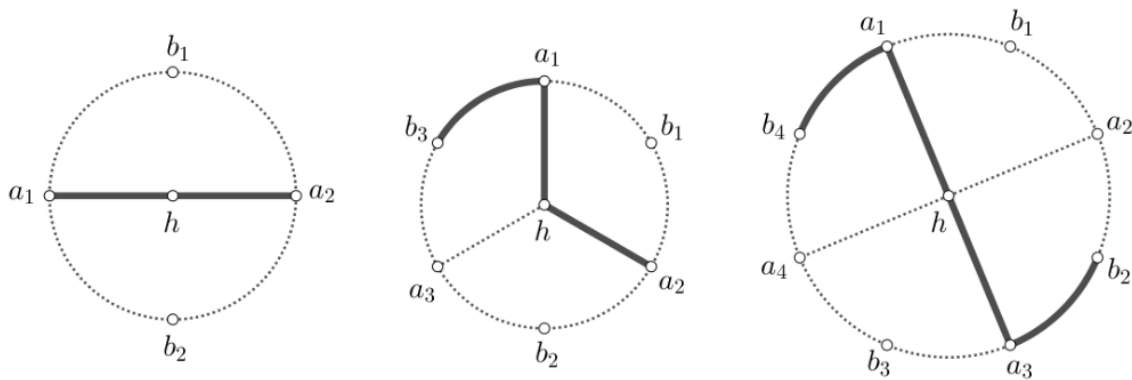
Konstruksi pewarnaan yang akan digunakan untuk membuktikan batas atas dalam penelitian ini merupakan sintesis dari pewarnaan di [13] dan [15].

3. Hasil dan Pembahasan

Untuk menerapkan Lemma 1 ke graf gerigi, perlu diketahui diameternya.

Teorema 1. *Untuk $n \geq 2$, diameter graf gerigi G_n adalah $diam(G_n) = \min\{n, 4\}$.*

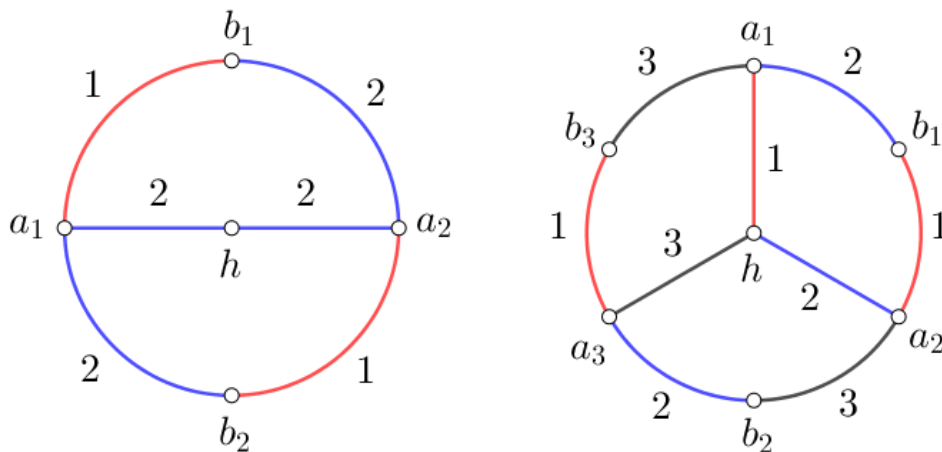
Bukti: Tinjau Gambar 2. Setiap pasang simpul di G_2 dapat dihubungkan oleh lintasan sepanjang 1 atau 2, sehingga $diam(G_2) = 2$. Setiap pasang simpul di G_3 dapat dihubungkan oleh lintasan sepanjang 1, 2, atau 3, sehingga $diam(G_3) = 3$. Jika $n \geq 4$, jarak terjauh dimiliki oleh pasangan “titik tengah” b_i, b_j pada dua juring yang tak bersebelahan, dan jaraknya 4. ■



Gambar 2. Ilustrasi geodesik terpanjang (dicetak tebal) pada graf gerigi G_n .

Teorema 2. Untuk $n \geq 2$, selalu ada pewarnaan pelangi di graf gerigi G_n yang menggunakan $\min\{n, 4\}$ buah warna.

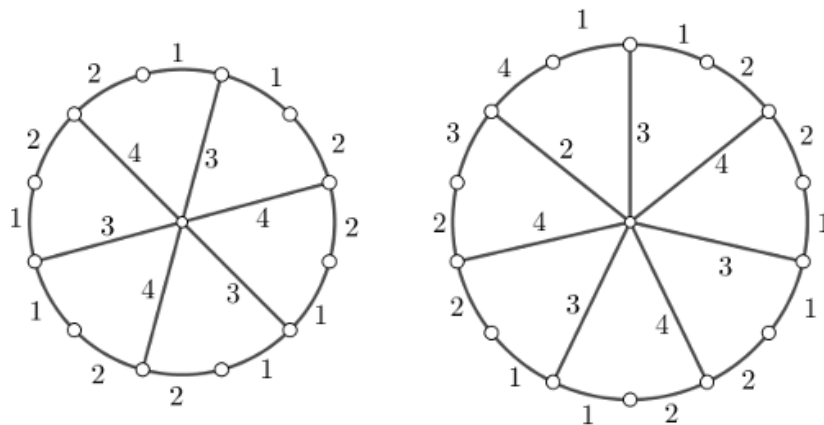
Bukti: Untuk $n = 2$ dan $n = 3$, pewarnaannya diberikan pada Gambar 3 berikut ini. Dengan pewarnaan yang diberikan, dapat dicek secara *brute force* bahwa untuk setiap pasang simpul selalu ada lintasan pelangi yang menghubungkan keduanya.



Gambar 3. Pewarnaan pelangi pada graf gerigi G_2 dan G_3 .

Selanjutnya anggap $n \geq 4$, sehingga $\min\{n, 4\} = 4$. Warnai sisi-sisi G_n dengan empat warna sebagai berikut: (garis di atas berarti pengulangan)

- Jika n genap, warnai peleknya $\overline{1,2,2,1}$ lalu warnai rujinya $\overline{3,4}$.
 - Jika n ganjil, warnai peleknya $\overline{1,2,2,1, 1,2,2,3,4,1}$ lalu warnai rujinya $\overline{3,4, 2}$.
- Pewarnaan ini diilustrasikan untuk $n = 6$ dan $n = 7$ pada Gambar 4.



Gambar 4. Ilustrasi pewarnaan pelangi pada kasus n genap (kiri) dan ganjil (kanan).

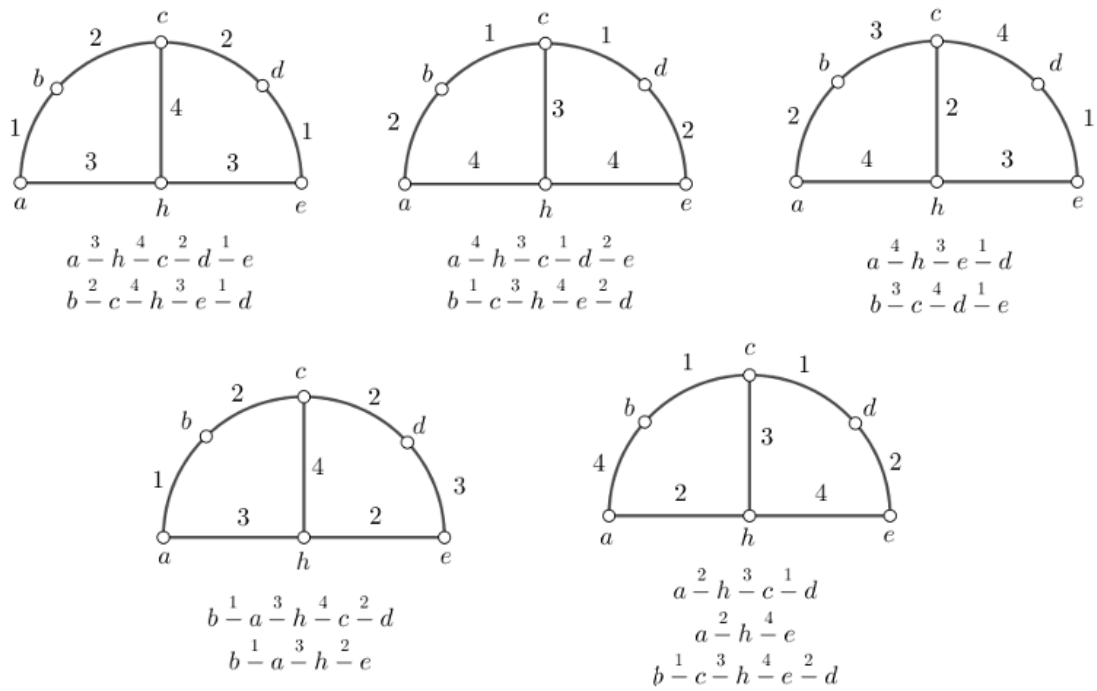
Sebagai catatan, pewarnaan pada kasus n genap adalah sama dengan pewarnaan yang diberikan di [13], namun pewarnaan pada kasus n ganjil diperoleh dengan memodifikasi warna-warna pada dua juring terakhir. Modifikasi tersebut terinspirasi dari pewarnaan yang diberikan di [15], namun diperumum ke semua n .

Akan dibuktikan bahwa pewarnaan tersebut adalah pewarnaan pelangi. Cukup dicari lintasan pelangi antara setiap pasang simpul berbeda.

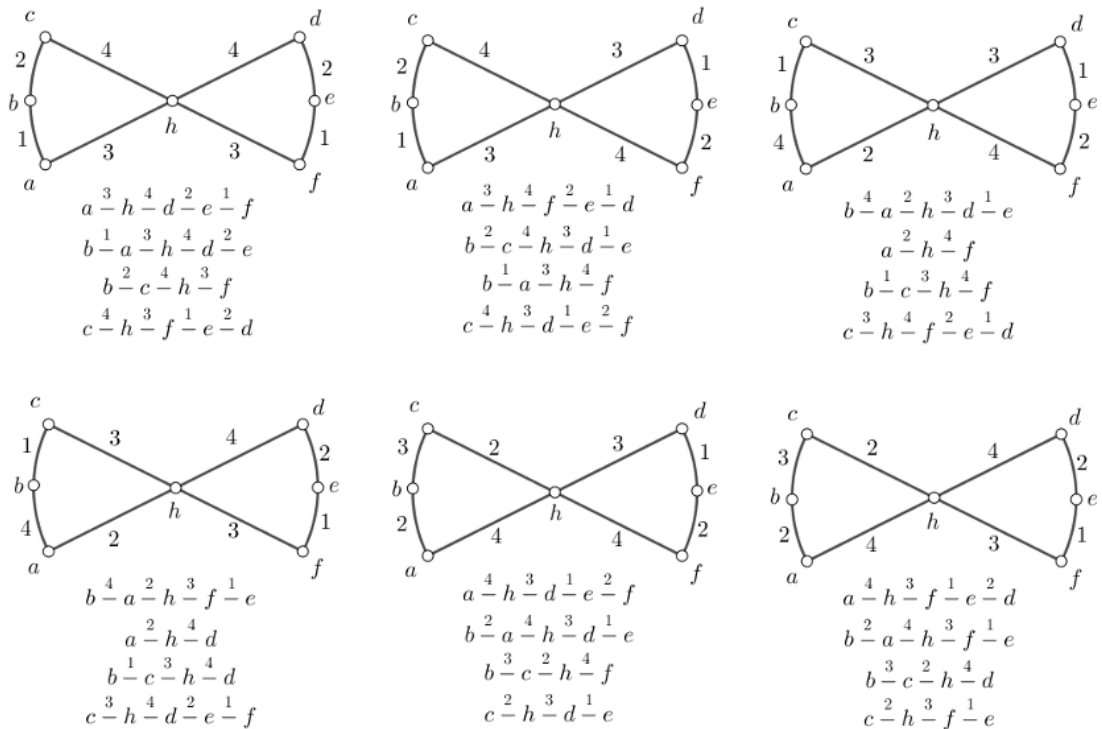
Jika pasangan simpul tersebut bertetangga, maka terdapat lintasan pelangi yang terdiri atas satu sisi. Jika pasangan simpul tersebut berada pada juring yang sama, dapat dicek bahwa selalu ada lintasan pelangi yang menghubungkan keduanya di dalam juring tersebut. Jika pasangan simpul berada pada dua juring yang bersebelahan, lintasan pelanginya dapat dicari sebagai sublintasan dari lintasan-lintasan yang ada di Gambar 5. Jika pasangan simpul berada pada dua juring berbeda yang tidak bersebelahan, lihat Gambar 6. Perhatikan Gambar 5 dan Gambar 6 memberikan lintasan pelangi yang diperlukan untuk berapapun nilai n , karena setiap pasang juring selalu dapat dihubungkan melalui pusat. ■

Sekarang, dengan Lemma 1 dan Teorema 1 diperoleh $rc(G_n) \geq \min\{n, 4\}$, sedangkan dari Teorema 2 diperoleh $rc(G_n) \leq \min\{n, 4\}$. Maka terjadi kesamaan, dan disimpulkan $rc(G_n) = \min\{n, 4\}$ untuk setiap $n \geq 2$.

Menarik untuk diamati bahwa $rc(G_n) = \min\{n, 4\} = 4$ untuk $n \geq 4$. Dengan kata lain, walaupun ukuran grafnya bertambah tapi bilangan keterhubungan pelanginya tetap kecil yaitu 4, sama dengan diameternya. Contoh ini mendukung pengamatan bahwa $rc(G) = diam(G)$ sangat sering terjadi (tapi tidak selalu, ada banyak contoh graf yang bilangan keterhubungan pelanginya lebih besar dari diameter).



Gambar 5. Lintasan pelangi antara dua juring bersebelahan.



Gambar 6. Lintasan pelangi antara dua juring tak bersebelahan. Ini berlaku untuk berapapun jarak antara dua juring tersebut di pelek.

4. Simpulan dan Saran

Penelitian ini telah menunjukkan bahwa bilangan keterhubungan pelangi dari graf gerigi G_n adalah $\min\{n, 4\}$ untuk setiap $n \geq 2$. Hasil ini memperkaya khazanah teori graf, khususnya keterhubungan pelangi dari graf-graf yang terkait dengan graf siklus seperti graf roda dan graf kemudi (*helm graph*).

Saran untuk penelitian selanjutnya adalah menyelidiki versi “kuat” dari bilangan keterhubungan pelangi pada graf gerigi. Secara umum, bilangan keterhubungan pelangi kuat (*strong rainbow connection number*) $src(G)$ adalah nilai terkecil k sehingga ada pemetaan $c: E(G) \rightarrow \{1, \dots, k\}$ dengan sifat bahwa untuk setiap pasang simpul berbeda selalu ada geodesik pelangi yang menghubungkan keduanya; konsep ini juga diperkenalkan oleh Chartrand *et al.* [1]. Langkah natural berikutnya adalah menyelidiki $src(G_n)$. Kontras dengan $rc(G_n) = \min\{n, 4\}$ yang nilainya konstan saat $n \geq 4$, diduga nilai $src(G_n)$ akan tumbuh bersama n karena geodesik antara dua simpul yang berjauhan di pelek harus melewati titik pusat, sehingga akan ada struktur serupa graf bintang yang menjadi *obstruction* untuk nilai src yang kecil.

Arah lain yang juga dapat ditempuh adalah meneliti bilangan keterhubungan pelangi dari graf Jahangir $J_{d,n}$ yang diperoleh dari graf roda W_n dengan menyisipkan sebanyak $d - 1$ buah simpul pada setiap sisi lingkaran luar; graf gerigi G_n adalah graf Jahangir $J_{2,n}$. Cukup natural untuk menduga bahwa $rc(J_{d,n})$ akan tumbuh bersama d tapi konstan terhadap n . Tentu hal tersebut perlu diselidiki lebih dalam.

Daftar Pustaka

- [1] G. Chartrand, G.L. Johns, K.A. McKeon, dan P. Zhang, “Rainbow connection in graphs,” *Mathematica Bohemica*, vol. 133, pp. 85–98, 2008. <http://dx.doi.org/10.21136/MB.2008.133947>
- [2] S. Chakraborty, E. Fischer, A. Matsliah, dan R. Yuster, “Hardness and algorithms for rainbow connectivity,” *Journal of Combinatorial Optimization*, vol. 21, pp. 330–347, 2011. <https://doi.org/10.1007/s10878-009-9250-9>
- [3] S. Li, X. Li, dan Y. Shi, “Note on the complexity of deciding the rainbow (vertex-)connectedness for bipartite graphs,” *Applied Mathematics and Computing*, vol. 258, pp. 155–161, 2015. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2015.02.015>
- [4] L.S. Chandran dan D. Rajendraprasad, “Rainbow colouring of split and threshold graphs,” dalam: J. Gudmundsson, Mestre, J., Viglas, T. (eds) *Computing and Combinatorics. COCOON 2012. Lecture Notes in Computer Science*, vol. 7434, pp. 181–192, 2012. https://doi.org/10.1007/978-3-642-32241-9_16
- [5] L.S. Chandran dan D. Rajendraprasad, “Inapproximability of rainbow colouring,” dalam: *IARCS Annual Conference on Foundations of Software Technology and Theoretical Computer Science (FSTTCS 2013). Leibniz International Proceedings in Informatics (LIPIcs)*, vol. 24, pp. 153–162, 2013. <https://doi.org/10.4230/LIPIcs.FSTTCS.2013.153>
- [6] Y. Sun, “Rainbow connection numbers for undirected double-loop networks,” dalam: Gao, D., Ruan, N., Xing, W. (eds) *Advances in Global Optimization. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics*, vol. 95, 2015. https://doi.org/10.1007/978-3-319-08377-3_12
- [7] X. Li dan Y. Sun, “Rainbow connection numbers of line graphs,” *Ars Combinatoria*, vol. 100, pp. 449–463, 2011. <https://combinatorialpress.com/article/ars/Volume%20100/volume-100-paper-38.pdf>
- [8] S. Klavzar dan G. Mekis, “On the rainbow connection of Cartesian products and their subgraphs,” *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, vol. 32, no. 4, pp. 783–793, 2012. <https://doi.org/10.7151/dmgt.1644>
- [9] T. Gologranca, G. Mekis, dan I. Peterin, “Rainbow connection and graph products,” *Graphs and Combinatorics*, vol. 30, pp. 591–607, 2014. <https://doi.org/10.1007/s00373-013-1295-y>
- [10] F. Septyanto dan K.A. Sugeng, “Rainbow connections of graph joins,” *Australasian Journal of*

- Combinatorics: Special Issue in Memory of Mirka Miller*, vol. 69, pp. 375–381, 2017. https://ajc.maths.uq.edu.au/pdf/69/ajc_v69_p375.pdf
- [11] F. Septyanto, "Rainbow connection number of corona product of graphs," *Electronic Journal of Graph Theory and Applications*, vol. 12, no. 2, pp. 363–378, 2024. <https://dx.doi.org/10.5614/ejgta.2024.12.2.14>
- [12] X. Li dan Y. Sun, "An updated survey on rainbow connections of graphs - a dynamic survey," *Theory & Applications of Graphs*, vol. 0, article 3, 2017. <https://doi.org/10.20429/tag.2017.000103>
- [13] S. Sy, R. Wijaya, dan Surahmat, "Rainbow connection number of some graphs," *Applied Mathematical Sciences*, vol. 8, no. 94, pp. 4693–4696, 2014. <http://dx.doi.org/10.12988/ams.2014.46398>
- [14] D.N. Asmara, S. Sy, dan Effendi, "Bilangan rainbow connection dan strong rainbow connection pada graf Jahangir $J_{2,m}$," *Jurnal Matematika UNAND*, vol. 7, no. 1, pp. 64–69, 2018. <https://doi.org/10.25077/jmu.7.1.64-69.2018>
- [15] D. Welyyanti, M. Randa, dan L. Yulianti, "Bilangan rainbow connection dan strong rainbow connection pada graf Jahangir $J_{2,m}$ untuk $2 \leq m \leq 8$," *Jurnal Matematika UNAND*, vol. 12, no. 1, pp. 55–64, 2023. <https://doi.org/10.25077/jmua.12.1.55-64.2023>