PERBANDINGAN HARGA BELI OPSI *BARRIER KNOCK IN CALL* DENGAN VARIASI SIMULASI MONTE CARLO

Jeffrey Adi Wijaya, Di Khumaidi Zauqani, Annisa Aulia Putri,
Prapto Tri Supriyo, *Endar Hasafah Nugrahani

Sekolah Sains Data, Matematika, dan Informatika, Institut Pertanian Bogor
Jl. Meranti, Kampus IPB Darmaga, Bogor.
jeffadwijaya@apps.ipb.ac.id, 09zauqani@apps.ipb.ac.id, aauliaputri@apps.ipb.ac.id,
praptosu@apps.ipb.ac.id, e_nugrahani@apps.ipb.ac.id ****corresponding author***.

Abstrak

Opsi *barrier knock in* merupakan salah satu instrumen derivatif eksotik yang semakin relevan dalam menghadapi kondisi pasar yang dinamis dan penuh ketidakpastian. Opsi ini hanya menjadi aktif ketika harga aset dasar menyentuh ambang batas tertentu, sehingga memberikan fleksibilitas sekaligus efisiensi dalam manajemen risiko. Penelitian ini bertujuan membandingkan empat variasi metode simulasi Monte Carlo dalam menghitung harga beli opsi tersebut, yaitu Monte Carlo Standar, *Control Variate*, *Antithetic Variate*, dan *Brownian Bridge Correction*. Menggunakan data historis saham NVDA dan parameter suku bunga bebas risiko, simulasi dilakukan untuk dua jenis opsi, yaitu *Down and In Call* dan *Up and In Call*. Hasil menunjukkan bahwa metode *Control Variate* unggul dalam menghasilkan estimasi harga yang stabil dan akurat, bahkan dengan jumlah simulasi yang kecil. Sementara itu, metode *Antithetic Variate* memberikan hasil yang konsisten dan efisien dari sisi waktu, terutama pada opsi *Down and In*. Metode *Brownian Bridge* menunjukkan keunggulan dalam efisiensi komputasi, meski cenderung konservatif dalam deteksi lintasan menyentuh *barrier*. Temuan ini menunjukkan bahwa pemilihan metode simulasi yang tepat sangat bergantung pada kebutuhan antara akurasi perhitungan dan efisiensi eksekusi.

Kata kunci: *antithetic variate*, *brownian bridge*, *control variate*, opsi *barrier knock in*, simulasi Monte Carlo

1 Pendahuluan

Di tengah meningkatnya ketidakpastian pasar, kebutuhan akan instrumen keuangan yang fleksibel dan mampu mengelola risiko secara efektif menjadi semakin penting. Instrumen derivatif memainkan peran sentral dalam dunia keuangan modern, baik sebagai alat lindung nilai (*hedging*) maupun sebagai sarana spekulasi. Salah satu instrumen derivatif yang memiliki struktur kompleks tetapi menawarkan fleksibilitas tinggi adalah opsi *barrier*, yakni opsi eksotik yang keberlakuannya ditentukan oleh apakah harga aset dasar menyentuh atau melampaui ambang batas (*barrier*) tertentu selama periode kontrak [1]. Berbeda dengan opsi vanilla yang hanya mempertimbangkan harga aset pada saat jatuh tempo, opsi *barrier* tergolong sebagai opsi *path dependent* karena mempertimbangkan lintasan harga aset sepanjang periode kontrak [2]. Struktur ini

2020 Mathematics Subject Classification: 91G20, 91G60.
Diajukan: 22/05/2026, diterima: 28/06/2026. DOI: https://doi.org/10.29244/milang.22.1.111-124
MILANG Journal of Mathematics and Its Applications, Vol.22, No.1, pp.111-124 ISSN: 2963-5233

menjadikan opsi *barrier* menarik dalam praktik pasar karena mampu memberikan perlindungan sekaligus potensi keuntungan dengan biaya yang relatif lebih rendah dibandingkan opsi konvensional [3].

Dalam penelitian ini, fokus diberikan pada opsi *barrier knock in*, yaitu opsi yang hanya menjadi aktif jika harga aset dasar menyentuh ambang batas tertentu selama periode kontrak [3]. Secara khusus, opsi *barrier knock in* dipilih karena menawarkan keunggulan dalam memberikan perlindungan lebih baik terhadap fluktuasi harga yang tinggi, menjadikannya relevan untuk kondisi pasar yang volatil. Tingginya sensitivitas harga opsi ini terhadap parameter seperti posisi awal harga, volatilitas, dan waktu jatuh tempo mendorong perlunya pendekatan matematis dan komputasional yang cermat dalam proses penentuan harganya.

Salah satu pendekatan yang banyak digunakan dalam praktik dan penelitian untuk menangani kompleksitas opsi eksotik adalah metode simulasi Monte Carlo. Meski fleksibel, Monte Carlo Standar memiliki kelemahan berupa konvergensi yang lambat dan varians estimasi yang tinggi [4]. Oleh karena itu, berbagai teknik pengurangan varians telah dikembangkan untuk meningkatkan efisiensi dan akurasi simulasi, seperti *Control Variate*, *Antithetic Variate*, dan pendekatan berbasis *Brownian Bridge*. Metode *Antithetic Variate* mengurangi varians dengan memanfaatkan korelasi negatif antar lintasan simulasi, menghasilkan galat yang lebih kecil dan mendekati solusi eksak dengan lebih cepat [5]. Sementara itu, *Control Variate* meningkatkan stabilitas estimasi dengan menggunakan variabel pembanding yang berkorelasi tinggi terhadap variabel target [6]. Lebih lanjut, untuk opsi *barrier* yang dimonitor secara kontinu, pendekatan *Brownian Bridge* terbukti efektif dalam menangkap kemungkinan lintasan harga yang menyentuh *barrier* di antara dua titik waktu yang diamati, kemungkinan yang sering terlewat dalam pendekatan diskret [7].

Penulisan artikel ini bertujuan untuk mengeksplorasi valuasi numerik harga beli opsi *barrier knock in* dan membandingkan empat variasi metode simulasi Monte Carlo, yaitu Monte Carlo standar, *Control Variate*, *Antithetic Variate*, dan *Brownian Bridge*, dengan menilai efektivitas masing-masing metode dalam menghasilkan estimasi yang akurat dan efisien secara komputasional.

2 Data dan Metode

2.1 Data

Penelitian ini menggunakan data historis harga saham NVIDIA *Corporation* (NVDA) yang diperoleh dari situs Investing.com. Data yang digunakan berupa data harga penutupan mingguan saham NVDA selama periode 23 Februari 2020 hingga 16 Februari 2025. Penelitian ini juga menggunakan tingkat suku bunga bebas risiko sebesar 4.22% yang diperoleh dari situs *YCharts.com*. Dalam penelitian ini, data yang diolah adalah log *return* saham R_t pada saat t, yang didefinisikan sebagai

$$R_t = \ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right)$$

dengan S_t adalah harga saham pada saat t. Untuk analisis lebih lanjut terhadap *return* saham ini, terdapat beberapa asumsi antara lain bahwa log *return* memiliki distribusi normal, dengan parameter nilai tengah dan volatilitas konstan, perubahan nilai return tidak bergantung waktu, serta tidak ada biaya transaksi dan pajak dalam perdagangan saham tersebut.

Di antara asumsi-asumsi tersebut, pengujian asumsi distribusi normal perlu untuk dilakukan sebelum analisis lanjutan dilakukan. Uji normalitas dilakukan dengan menggunakan uji Anderson Darling [8] yang lebih efektif diterapkan pada data saham NVDA yang berukuran besar. Setelah memastikan normalitas data, langkah selanjutnya adalah menghitung volatilitas saham sebagai salah satu parameter penting dalam model penentuan harga opsi. Volatilitas di pasar keuangan menggambarkan tingkat risiko yang dihadapi investor melalui besarnya fluktuasi pergerakan harga saham dan ketidakpastian yang menyertainya [9]. Berkenaan data return salam yang digunakan adalah data mingguan, maka volatilitas tahunan dihitung menggunakan persamaan berikut.

$$\sigma = s \times \sqrt{52}, \tag{1}$$

di mana s adalah standar deviasi log *return* mingguan, dihitung menggunakan formula:

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(R_i - \bar{R})^2}, \tag{2}$$

dengan n adalah banyaknya periode pengamatan, R_i adalah nilai log *return* pada minggu ke-i, dan $\bar{R}$ adalah rata-rata log *return* mingguan selama periode pengamatan.

2.2 Opsi *Barrier Knock In Call*

Opsi *barrier* adalah jenis opsi eksotik yang hanya berlaku apabila harga aset dasar menyentuh atau melewati ambang batas tertentu yang disebut *barrier* selama masa hidup opsi. Dalam konteks ini, fokus penelitian diarahkan pada opsi *barrier knock in*, yang hanya menjadi aktif (*in the money*) apabila harga aset menyentuh *barrier* yang telah ditentukan [3]. Dalam penelitian ini, jenis opsi yang dianalisis serta *payoff*nya adalah sebagai berikut.

- *Down and in Call*, yaitu opsi *call* yang hanya aktif jika harga aset pernah turun hingga menyentuh atau melewati *barrier* H dan

$$Payoff = \begin{cases} \max(S_T - K, 0), & \min S_t \leq H \\ 0, & \min S_t > B. \end{cases} \tag{3}$$

- *Up and in Call*, yaitu opsi *call* yang baru aktif jika harga aset pernah naik hingga menyentuh atau melewati *barrier* H dan

$$Payoff = \begin{cases} \max(S_T - K, 0), & \max S_t \geq H \\ 0, & \max S_t < H. \end{cases} \tag{4}$$

di mana S_t adalah harga aset dasar pada waktu t, S_T adalah harga aset dasar pada saat jatuh tempo T, K adalah harga *strike* dari opsi, dan H adalah nilai *barrier*.

Secara umum, harga opsi *barrier knock in* telah memiliki formulasi sulosi analitik [10]. Akan tetapi pada penelitian ini tetap diteliti lebih lanjut skema sulosi numeriknya. Hal ini terutama untuk mengeksplorasi berbagai kemungkinan variasi perbaikan hasil solusi numerik tersebut.

2.3 Metode Simulasi Monte Carlo

Metode Simulasi Monte Carlo Standar

Metode Monte Carlo Standar digunakan untuk menghitung harga opsi dengan melakukan simulasi harga aset dasar secara acak (*random walk*) dan menghitung nilai opsi berdasarkan hasil simulasi tersebut [4]. Untuk menghitung harga opsi *barrier*, dilakukan dengan simulasi harga aset dasar yang terpengaruh oleh volatilitas dan tingkat suku bunga yang diberikan, serta diperhitungkan apakah harga aset tersebut saat menyentuh *barrier* sebelum jatuh tempo.

Parameter yang diperlukan adalah S_0 (harga awal aset dasar), K (harga *strike* opsi), H (*barrier level*), r (tingkat suku bunga bebas risiko), σ (volatilitas aset dasar), T (waktu hingga jatuh tempo), M (banyaknya simulasi), dan banyaknya *steps* (langkah waktu) dalam simulasi. Pada setiap langkah simulasi, dihitung harga aset dasar dengan menggunakan persamaan stokastik [4] berikut.

$$S_{t+1} = S_t . \exp\left((r - 0.5\sigma^2)\, \Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}. Z\right), \tag{5}$$

di mana Z adalah variabel acak yang terdistribusi normal standar, r adalah suku bunga bebas risiko, σ adalah volatilitas, dan Δt adalah langkah waktu.

Selanjutnya ditentukan harga aset ketika menyentuh *barrier* B. Misalkan simulasi dilakukan dalam N ulangan. Jika harga aset menyentuh *barrier*, opsi akan *knocked in*, dengan *payoff* nilai opsi pada waktu jatuh tempo [4] untuk simulasi ke-i adalah

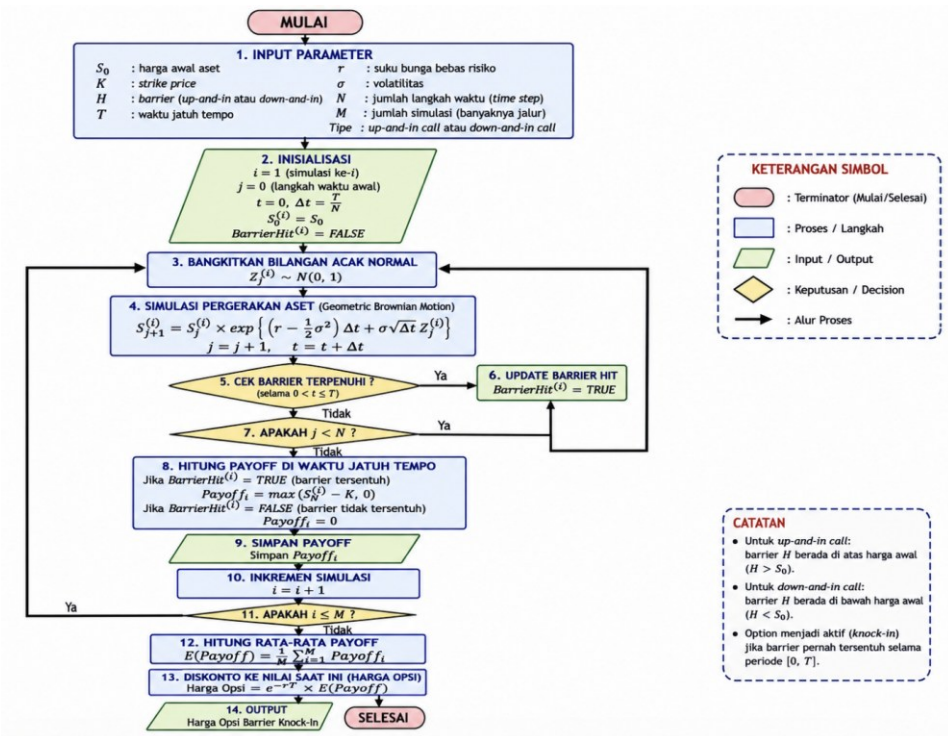
$$Payoff_i = P_i = \max(S_T - K, 0), \qquad i = 1,2,\cdots,M \tag{6}$$

Jika tidak *knock in*, nilai *payoff* adalah 0. Harga opsi dihitung dengan mengambil rata-rata dari seluruh *payoff* opsi pada seluruh ulangan simulasi, $i = 1,2,\cdots,M$, yang terdiskonto pada tingkat suku bunga r, serta standar *error* sebagai berikut [4].

$$Harga\ Opsi = e^{-rT}.\mathrm{mean}(P_i) \tag{7}$$

$$Std\ Error = \frac{\mathrm{Std}(P_i)}{\sqrt{N}}. \tag{8}$$

Skema simulasi penentuan harga opsi *barrier knock in* menggunakan simulasi Monte Carlo standar diberikan pada Gambar 1.



Gambar 1. Algoritma penentuan harga opsi *barrier knock in call* dengan simulasi Monte Carlo standar.

Metode Simulasi Monte Carlo *Antithetic Variate*

Metode Monte Carlo dengan *Antithetic Variate* menggunakan pasangan variabel acak yang saling bertentangan (*antithetic*) untuk mengurangi varians dari estimasi [1]. Dalam hal ini, kita menggunakan dua simulasi untuk setiap langkah waktu, yaitu dengan variabel acak Z_1 dan $Z_2 = -Z_1$.

Parameter-parameter yang dibutuhkan seperti pada metode standar. Setiap iterasi ke-i, $i = 1, \cdots, M$, dilakukan dua simulasi untuk setiap langkah waktu, yaitu dengan Z_1 dan $Z_2 = -Z_1$. Selanjutnya diperiksa apakah kedua simulasi menyentuh *barrier*. Jika ya, tandai sebagai *knock in*. Jika kondisi opsi *knock in*, nilai *payoff* dihitung untuk kedua simulasi dan dijumlahkan keduanya, dengan S_{T1} dan S_{T2} adalah harga terminal dari jalur biasa dan *antithetic* serta nilai *payoff* simulasi ke-i [1] adalah

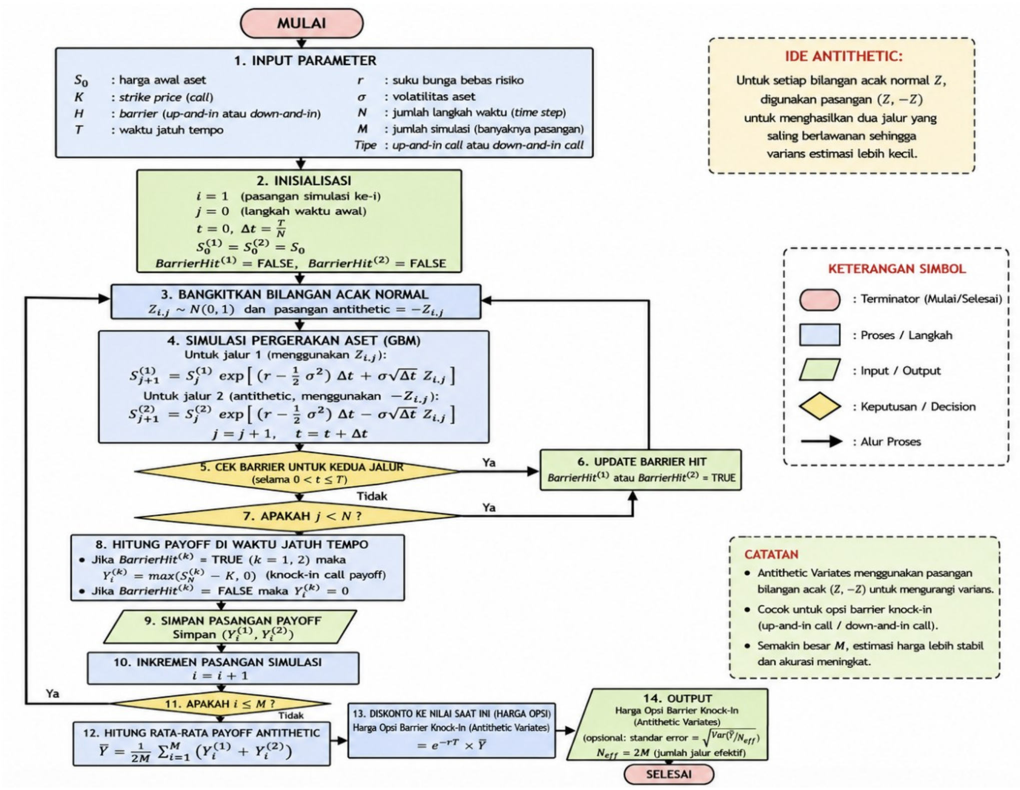
$$Payoff_i = P_i = \frac{1}{2}(\max(S_{T1} - K, 0) + \max(S_{T2} - K, 0)) \tag{9}$$

Selanjutnya harga opsi dihitung dengan rata-rata dari *payoff* opsi pada seluruh ulangan simulasi, $i = 1, \cdots, N$, yang terdiskonto pada tingkat suku bunga r dan standar *error* sebagai berikut [1].

$$Harga\ Opsi = e^{-rT}.\mathrm{mean}(P_i) \tag{10}$$

$$Std\ Error = \frac{\mathrm{Std}(P_i)}{\sqrt{N/2}} \tag{11}$$

Skema simulasi penentuan harga opsi *barrier knock in* menggunakan simulasi Monte Carlo *antithetic variate* diberikan pada Gambar 2.



Gambar 2. Algoritma penentuan harga opsi *barrier knock in call* dengan simulasi Monte Carlo *antithetic variate*.

Simulasi Monte Carlo *Control Variate*

Metode Monte Carlo dengan *Control Variate* menggunakan metode Monte Carlo yang sama seperti pada metode standar, tetapi dengan menambahkan teknik *control variate* untuk mengurangi *varians* dari estimasi harga opsi [3]. *Control variate* menggunakan opsi Eropa biasa sebagai variabel kontrol. Parameter-parameter yang dibutuhkan sama seperti pada metode standar, dilanjutkan dengan mensimulasikan harga aset dasar seperti pada metode Monte Carlo standar. Menghitung dua jenis *payoff*, *payoff* opsi *barrier* dan *payoff* opsi Eropa [1].

$$Payoff\ Control\ Variate = max(S_T - K, 0) \tag{12}$$

Selanjutnya, harga opsi Eropa dihitung secara analitik menggunakan metode *Black Scholes*, dengan $N(d_1)$ dan $N(d_2)$ merupakan fungsi distribusi kumulatif normal standar [1]

$$C_{analitik} = S_0 N(d_1) - Ke^{-rT} N(d_2) \tag{13}$$

di mana:

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + (r + 0.5\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}, \qquad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}. \tag{14}$$

Mengestimasi *control variate* untuk menentukan nilai *beta* yang akan digunakan untuk mengurangi varians, dengan $X =$ *payoff* opsi *barrier* dan $Y =$ *payoff* opsi Eropa [1] adalah vektor berdimensi M sesuai banyaknya simulasi.

$$\beta = \frac{cov(X, Y)}{var(Y)}. \tag{15}$$

Mengurangi *payoff* yang dihitung dengan β untuk mendapatkan estimasi hasil yang lebih baik dan akurat. Untuk setiap langkah simulasi ke-i, $i = 1,2,\cdots,M$, ditetapkan

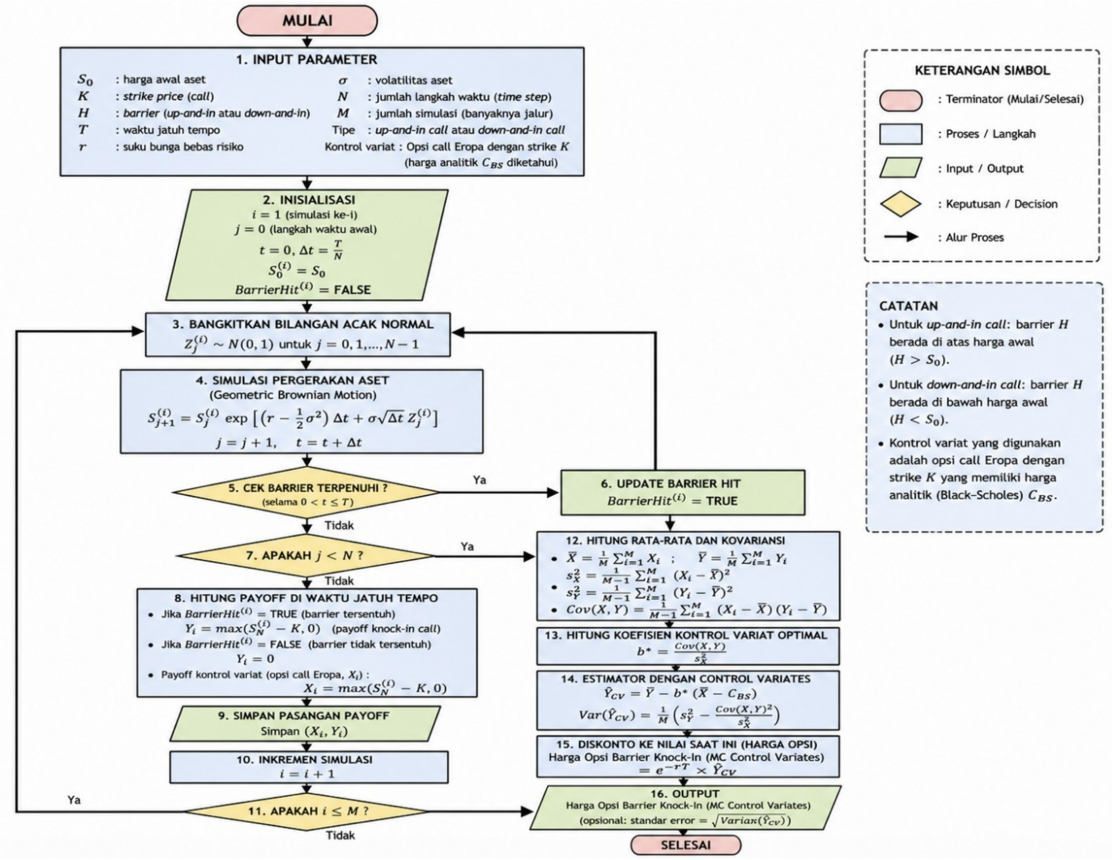
$$Adjusted\_Payoff\ _i = Payoff - \beta(Y - C_{analitik}) \tag{16}$$

Menghitung harga opsi dengan rata-rata dari *payoff* yang terdiskonto dan standar *error*.

$$Harga\ Opsi = e^{-rT} \cdot \mathrm{mean}(Adjusted\_Payoff\ _i) \tag{17}$$

$$Std\ Error = \frac{Std(Adjusted\_Payoff\ _i)}{\sqrt{N}}. \tag{18}$$

Skema simulasi penentuan harga opsi *barrier knock in* menggunakan simulasi Monte Carlo *control variate* diberikan pada Gambar 3.



Gambar 3. Algoritma penentuan harga opsi *barrier knock in call* dengan simulasi Monte Carlo *control variate*.

Metode Simulasi Monte Carlo *Brownian Bridge Correction*

Metode Monte Carlo dengan *Brownian Bridge Correction* digunakan untuk meningkatkan akurasi pendeteksian apakah jalur harga menyentuh *barrier* antara dua titik waktu simulasi [11]. Alih-alih hanya memeriksa harga pada titik diskrit, metode ini menggunakan pendekatan probabilistik berdasarkan jembatan *Brown* (*Brownian Bridge*) untuk memperkirakan kemungkinan bahwa *barrier* telah disentuh di antara dua titik [12].

Parameter-parameter yang dibutuhkan seperti pada metode standar. Membangun *grid* waktu dari 0 hingga T dengan *steps* titik, dan untuk setiap simulasi, bangun jalur harga aset menggunakan model *Geometric Brownian Motion*:

$$S_t = S_0 . \exp\left((r - 0.5\sigma^2)t + \sigma W_t\right) \tag{19}$$

dengan W_t adalah proses *Wiener* dan dibentuk secara kumulatif dari nilai acak $Z \sim N(0,1)$.

Untuk setiap interval waktu $[t_j, t_{j+1}]$, lakukan langkah berikut:

- Hitung kemungkinan bahwa jalur menyentuh *barrier* di antara dua titik tersebut dengan pendekatan probabilistik berdasarkan jembatan *Brownian*.
- Jika harga di t_j dan t_{j+1} tidak berada di sisi yang sama terhadap *barrier*, maka kemungkinan sentuhan dihitung dengan [12]:

$$P = \exp\left(-\frac{2(\log H - \log S_{t_j})(\log H - \log S_{t_j+1})}{\sigma^2(t_{j+1} - t_j)}\right) \tag{20}$$

Probabilitas ini digunakan untuk memutuskan apakah opsi menjadi aktif (*knock in*), meskipun titik diskrit tidak menyentuh *barrier*.

- Gunakan bilangan acak $U \sim U(0,1)$ untuk memutuskan apakah jalur dianggap telah menyentuh *barrier* (*knock in*).

Saat *barrier* telah disentuh, maka nilai opsi dihitung sebagai:

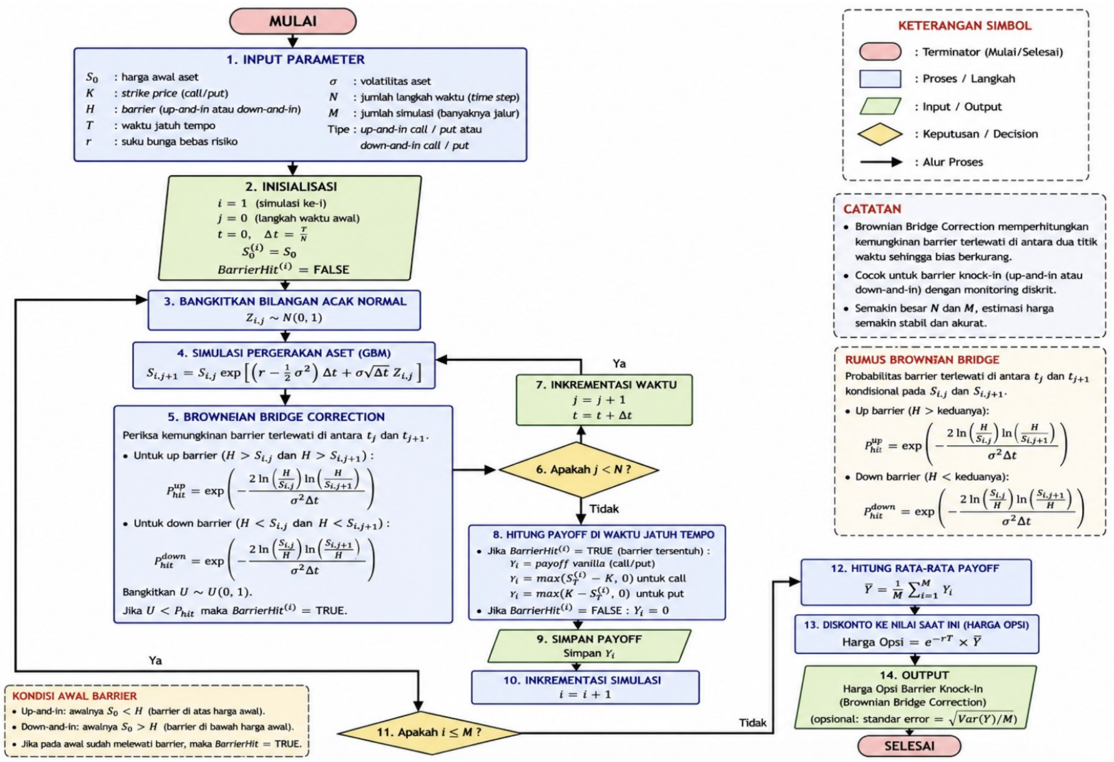
$$Payoff = P_i = \max(S_T - K, 0) \tag{21}$$

Jika *barrier* tidak disentuh, nilai opsi adalah 0. Setelah semua simulasi selesai, hitung harga opsi sebagai rata-rata dari nilai yang didiskonto dan standar *error*:

$$Harga\ Opsi = e^{-rT}.\mathrm{mean}(P_i) \tag{22}$$

$$Std\ Error = \frac{\mathrm{Std}(P_i)}{\sqrt{N}} \tag{23}$$

Skema simulasi penentuan harga opsi *barrier knock in* menggunakan simulasi Monte Carlo *Brownian bridge correction* diberikan pada Gambar 4.



Gambar 4. Algoritma penentuan harga opsi *barrier knock in call* dengan simulasi Monte Carlo *Brownian bridge correction*.

Langkah-langkah di atas diterapkan dengan konsisten untuk setiap jenis opsi *barrier* yang dianalisis dan hasilnya disajikan pada bab berikut.

3 Hasil Simulasi Harga Opsi

Penelitian ini mensimulasikan harga opsi *barrier* jenis *Down and In Call* dan *Up and In Call* menggunakan empat variasi metode Monte Carlo, yaitu Standar, *Control*

Variate, *Antithetic Variate*, dan *Brownian Bridge Correction*. Parameter yang dianalisis meliputi harga opsi, galat baku (*standard error*), dan waktu komputasi.

3.1 Penentuan Harga Opsi *Barrier Down and In Call*

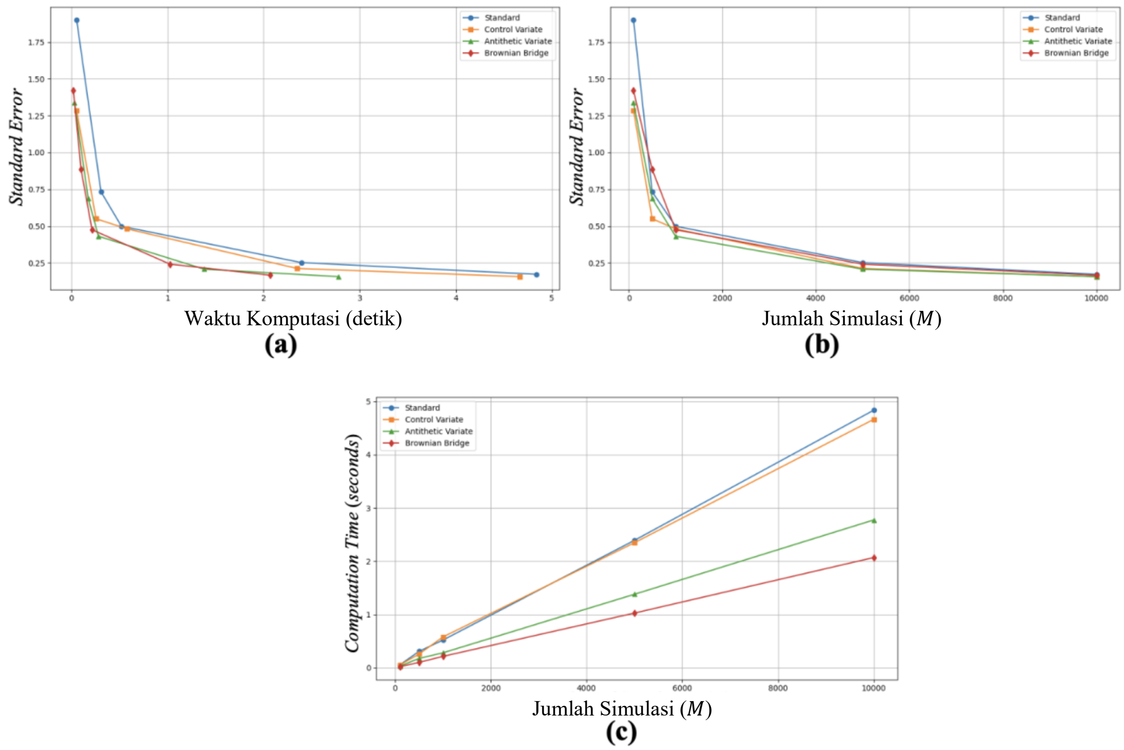
Hasil simulasi menunjukkan bahwa semakin besar banyaknya simulasi (M), *standard error* cenderung menurun, yang menandakan meningkatnya akurasi estimasi harga opsi namun, waktu komputasi juga meningkat seiring bertambahnya nilai M.

Tabel 1. Perbandingan opsi beli, *standard error*, dan waktu komputasi *Barrier Down and In Call*

Banyak Simulasi M	Metode	Harga Opsi	*Standard Error*	Waktu Komputasi (detik)
100	MC Standar	6.75	1.8993	0.055
	MC *Control Variate*	3.18	1.2849	0.055
	MC *Anthitetic Variate*	5.40	1.3386	0.033
	MC *Brownian Bridge Correction*	5.00	1.4203	0.021
5000	MC Standar	6.33	0.2526	2.392
	MC *Control Variate*	5.28	0.2127	2.347
	MC *Anthitetic Variate*	5.21	0.2079	1.380
	MC *Brownian Bridge Correction*	6.04	0.2417	1.027
10000	MC Standar	5.83	0.1731	4.837
	MC *Control Variate*	5.68	0.1571	4.666
	MC *Anthitetic Variate*	5.64	0.1573	2.776
	MC *Brownian Bridge Correction*	5.72	0.1667	2.070

Berdasarkan Tabel 1, metode Monte Carlo standar menghasilkan harga yang cukup stabil, berkisar antara 5.83 hingga 6.75, dengan *standard error* yang menurun signifikan dari 1.8993 pada $M = 100$ menjadi 0.1731 pada $M = 10000$. Hal ini menunjukkan bahwa metode standar dapat memberikan estimasi harga yang mendekati nilai sebenarnya ketika jumlah simulasi cukup besar. Metode *control variate* menunjukkan kinerja yang konsisten dalam menurunkan *standard error*, terutama pada jumlah simulasi tinggi. Namun, pada $M = 100$, harga yang dihasilkan (3.18) menyimpang cukup jauh dari metode lain, mengindikasikan sensitivitas tinggi terhadap jumlah simulasi kecil. Pada $M \geq 5000$, metode ini menunjukkan hasil yang lebih stabil dan akurat dengan waktu komputasi yang sebanding dengan MC Standar. Metode *antithetic variate* menghasilkan harga yang relatif stabil dan *standard error* yang lebih rendah dibandingkan metode standar. Selain itu, metode ini menunjukkan efisiensi waktu yang baik, menjadikannya pilihan yang seimbang antara akurasi dan kecepatan. Metode *Brownian bridge correction* menunjukkan efisiensi paling tinggi dalam hal waktu komputasi di semua level simulasi. Kecepatan metode ini sangat mendukung untuk implementasi praktis, terutama dalam sistem perdagangan algoritmik yang membutuhkan eksekusi cepat.

Sebagai kelanjutan dari analisis kuantitatif yang disajikan pada Tabel 1, Gambar 5 menyajikan visualisasi yang lebih jelas mengenai pola hubungan antarvariabel dalam simulasi.



Gambar 5. *Standard error vs* waktu komputasi (a), *standard error vs* jumlah simulasi (b), dan waktu komputasi *vs* jumlah simulasi (c) penentuan harga opsi *down-and-in Call*

Gambar 5 (a), menyajikan hubungan antara *standard error* dan waktu komputasi untuk opsi *down-and-in call*. Hasilnya menunjukkan bahwa semua metode mengalami penurunan *standard error* seiring meningkatnya waktu komputasi. Namun, metode *control variate* dan *antithetic variate* mencapai penurunan error yang lebih tajam pada waktu yang relatif singkat dibandingkan metode standar. *Control variate* secara konsisten menghasilkan error terendah, sementara *Brownian bridge* menunjukkan kinerja mendekati *antithetic variate* dengan waktu yang lebih singkat. Selanjutnya, Gambar 5 (b), memperlihatkan bahwa peningkatan jumlah simulasi pada *down-and-in call* menyebabkan penurunan *standard error* secara signifikan untuk keempat metode. Metode Standar memiliki error tertinggi pada setiap titik simulasi, sedangkan *antithetic variate* dan *control variate* menunjukkan konvergensi yang lebih cepat. *Brownian bridge* cenderung mendekati hasil dari *control variate*, tetapi sedikit tertinggal dalam hal akurasi meskipun tetap lebih cepat secara komputasi. Gambar 5 (c), menggambarkan hubungan antara jumlah simulasi dan waktu komputasi untuk opsi *down-and-in Call*. Tren peningkatan linear waktu komputasi kembali terlihat. Metode MC standar dan *control variate* menunjukkan waktu komputasi mendekati lima detik pada $M = 10000$. Sementara itu, metode *antithetic variate* dan *Brownian bridge* memperlihatkan efisiensi waktu yang signifikan, dengan *Brownian bridge* mencatat waktu tercepat di bawah 2.1 detik. Secara keseluruhan, metode MC *Brownian bridge* dan *antithetic variate* merupakan metode yang efisien dalam hal waktu, sedangkan *control variate* unggul dalam menurunkan *standard error* pada jumlah simulasi besar. Pemilihan metode sangat tergantung pada prioritas antara akurasi estimasi dan efisiensi waktu dalam aplikasi nyata.

3.2 Penentuan Harga Opsi *Barrier Up-and-In Call*

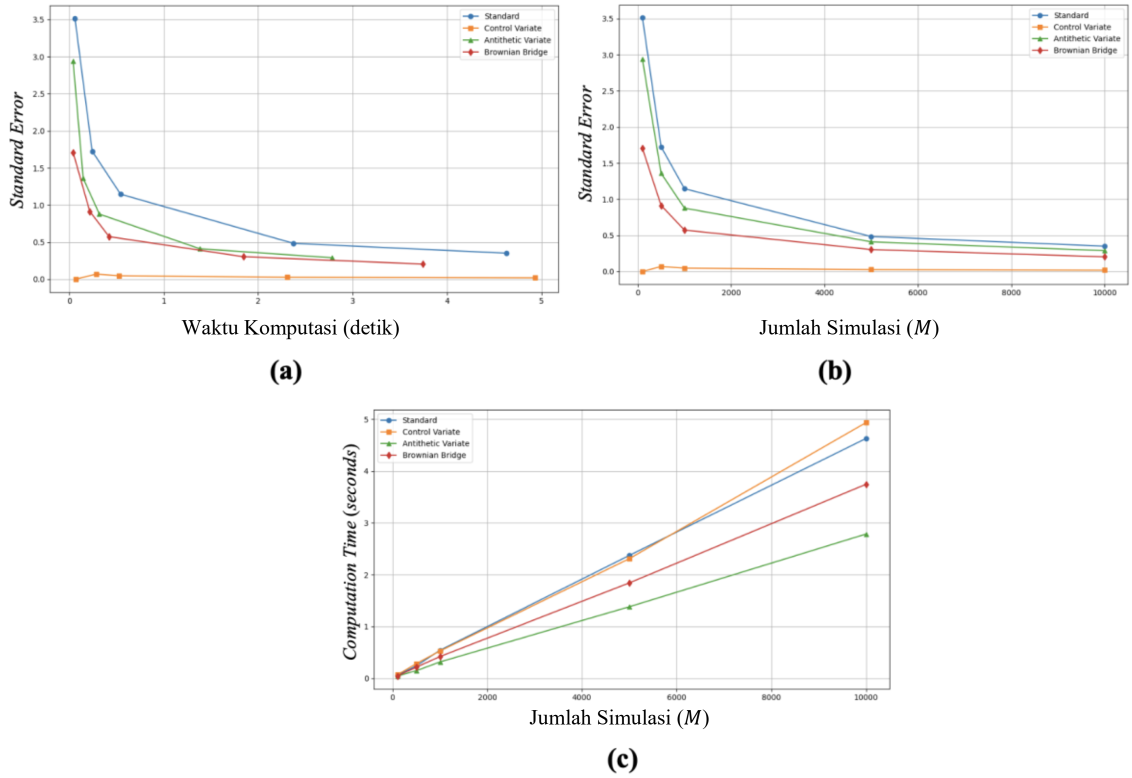
Hasil simulasi pada opsi beli *barrier up-and-in* menunjukkan variasi kinerja antar metode. Secara umum, peningkatan banyaknya simulasi (M) menurunkan *standard error* secara signifikan, yang mengindikasikan peningkatan akurasi estimasi. Namun, peningkatan M juga berdampak pada bertambahnya waktu komputasi.

Tabel 2. Perbandingan opsi beli, *standard error*, dan waktu komputasi *barrier up and in*

Banyak Simulasi M	Metode	Harga Opsi	*Standard Error*	Waktu Komputasi (detik)
100	MC Standar	19.58	3.5130	0.061
	MC *Control Variate*	21.12	0.0000	0.069
	MC *Anthitetic Variate*	26.06	2.9380	0.041
	MC *Brownian Bridge Correction*	6.94	1.7040	0.042
5000	MC Standar	20.49	0.4832	2.372
	MC *Control Variate*	20.82	0.0257	2.309
	MC *Anthitetic Variate*	21.36	0.4100	1.382
	MC *Brownian Bridge Correction*	8.57	0.3031	1.842
10000	MC Standar	20.54	0.3504	4.628
	MC *Control Variate*	20.81	0.0180	4.934
	MC *Anthitetic Variate*	21.84	0.2883	2.785
	MC *Brownian Bridge Correction*	8.22	0.2030	3.745

Pada Tabel 2, Metode Monte Carlo standar menghasilkan harga opsi yang relatif tinggi, berkisar di angka 20.5 dengan *standard error* yang menurun dari 3.5 pada $N = 100$ menjadi sekitar 0.35 pada $M = 10000$. Meskipun harga yang dihasilkan cenderung stabil, nilai *standard error*nya masih lebih tinggi dibanding metode lainnya. Metode *control variate* menunjukkan performa terbaik dalam hal akurasi dan stabilitas. Bahkan pada jumlah simulasi kecil ($M = 100$), metode ini mampu menghasilkan estimasi harga yang sangat presisi dengan *standard error* mendekati nol. Hal ini menunjukkan efektivitas metode ini dalam mereduksi *varians*, menjadikannya pilihan utama untuk opsi jenis *up-and-in*. Metode *antithetic variate* secara konsisten menghasilkan estimasi harga yang lebih tinggi dibanding metode lainnya, dengan harga mencapai 21.8 pada beberapa nilai M. Meskipun *standard error*nya relatif kecil dan stabil, kecenderungan untuk memberikan estimasi yang terlalu tinggi (*overestimate*) menunjukkan bahwa metode ini mungkin kurang tepat untuk opsi *up-and-in* jika presisi harga menjadi prioritas utama. Sebaliknya, metode *Brownian bridge correction* menunjukkan hasil harga yang secara signifikan lebih rendah, berkisar antara 6.9 hingga 8.5. Hal ini kemungkinan disebabkan oleh karakteristik metode yang terlalu konservatif dalam memperkirakan lintasan menyentuh *barrier*, sehingga kurang cocok diterapkan pada opsi jenis *up-and-in*. Meskipun demikian, metode ini menunjukkan efisiensi tinggi dalam hal waktu komputasi.

Selanjutnya, Gambar 6 menyajikan visualisasi yang lebih jelas mengenai pola hubungan antarvariabel dalam simulasi.



Gambar 6. *Standard error vs* waktu komputasi (a), *standard error vs* jumlah simulasi (b), dan waktu komputasi *vs* jumlah simulasi (c) penentuan harga opsi *up-and-in Call*

Pada Gambar 6 (a), yang menampilkan hubungan antara *standard error* dan waktu komputasi untuk opsi *up-and-in Call*, metode *control variate* sekali lagi menunjukkan keunggulan yang sangat mencolok. *Standard error* yang dihasilkan hampir mendekati nol pada seluruh rentang waktu, menandakan bahwa *varians* berhasil ditekan secara signifikan dengan teknik kontrol. *Antithetic variate* menunjukkan hasil error yang lebih tinggi dari *control variate* tetapi jauh lebih rendah dibanding metode standar. *Brownian bridge* menghasilkan error moderat dan stabil, tetapi tetap lebih tinggi dari *control variate*. Selanjutnya, Gambar 6 (b), menunjukkan penurunan *standard error* seiring bertambahnya jumlah simulasi untuk opsi *up-and-in call*. Metode *control variate* memberikan hasil yang sangat stabil dan rendah bahkan sejak jumlah simulasi yang rendah, menandakan efisiensi tinggi dalam konvergensi. *Antithetic variate* dan *Brownian bridge* menunjukkan pola penurunan error yang baik, tetapi tetap tertinggal dari *control variate* terutama pada M kecil. Metode standar menjadi yang paling tidak efisien, dengan error tinggi dan penurunan yang lambat meskipun jumlah simulasi ditingkatkan. Gambar 6 (c), menunjukkan hubungan antara jumlah simulasi dan waktu komputasi pada opsi *up-and-in call*. Secara umum, seluruh metode memperlihatkan pola waktu komputasi yang meningkat secara linear terhadap jumlah simulasi. Metode standar dan *control variate* memiliki waktu komputasi tertinggi, mendekati 5 detik pada $M = 1000$ yang menandakan beban komputasi signifikan terutama pada metode *control variate* karena adanya tambahan perhitungan estimasi opsi Eropa. Sebaliknya, metode *antithetic variate* dan *Brownian bridge* terbukti lebih efisien secara waktu, dengan waktu komputasi hanya sekitar 2.8 detik dan 3.7 detik masing-masing pada titik simulasi tertinggi. Berdasarkan segi efisiensi waktu, metode *Brownian bridge* dan *antithetic variate* cenderung lebih cepat dibandingkan metode standar dan *control variate*, terutama saat jumlah simulasi meningkat. Keunggulan ini penting dalam konteks implementasi praktis, seperti pada sistem perdagangan algoritmik yang memiliki batasan waktu eksekusi. Secara keseluruhan, metode *control variate* direkomendasikan untuk estimasi harga opsi *up-and-in* karena konsistensi hasil dan tingkat *standard error* yang sangat rendah namun, jika efisiensi waktu menjadi prioritas, metode *Brownian bridge* dan *antithetic variate* tetap layak dipertimbangkan dengan catatan terhadap potensi bias hasil estimasi.

4 Simpulan dan Saran

Dari hasil simulasi opsi *down-and-in call*, metode *antithetic variate* menjadi pilihan terbaik karena memberikan estimasi harga yang stabil, dengan standar error rendah dan waktu komputasi yang efisien. Keunggulan ini menjadikannya seimbang dari segi akurasi dan efisiensi, terutama pada jumlah simulasi menengah hingga tinggi. Sementara itu, dari hasil simulasi opsi *up-and-in call*, metode *control variate* paling menonjol karena mampu menghasilkan estimasi harga yang sangat akurat meskipun dengan jumlah simulasi yang sedikit. Hal ini menunjukkan tingkat keandalan yang tinggi dalam keterbatasan, meskipun membutuhkan waktu komputasi lebih lama.

Daftar Pustaka

[1] C.E. Murwaningtyas, W.S. Haryono, M.A. Uge, dan T. Kristofel, “Perbandingan metode Monte Carlo antithetic variate dan control variate dalam penentuan harga opsi barrier knock-out,” *Euler : Jurnal Ilmiah Matematika, Sains dan Teknologi*, vol. 12, no. 1, pp. 37–44, 2024, https://doi.org/10.37905/euler.v12i1.25128

[2] I. Kamila, E.H. Nugrahani, dan D.C. Lesmana, “Metode Monte Carlo untuk menentukan harga opsi barrier dengan suku bunga takkonstan,” *Milang Journal of Mathematics and Its Applications*, vol. 16, no.1, pp. 55–68, 2017. https://doi.org/10.29244/jmap.16.1.55-68

[3] R.B. Silalahi, D.C. Lesmana, dan R. Budiarti, “Determining the value of double barrier option using standard Monte Carlo, antithetic variate, and control variate methods,” *Barekeng: Jurnal Ilmu Matematika dan Terapan*, vol. 17, no. 2, pp. 1017–1026, 2023. https://doi.org/10.30598/barekengvol17iss2pp1017-1026

[4] K. Nouri dan B. Abbasi, “Implementation of the modified Monte Carlo simulation for evaluate the barrier option prices,” *Journal of Taibah University for Science*, vol. 11, no. 2, pp. 233–240, 2017. https://doi.org/10.1016/j.jtusci.2015.02.010

[5] S.B. Sitepu, D.C. Lesmana, R. Budiarti, “Pricing European basket option using the standard Monte Carlo and antithetic variates,” *Barekeng: Jurnal Ilmu Matematika dan Terapan*, vol. 17, no. 2, pp. 1007–1016, 2023. https://doi.org/10.30598/barekengvol17iss2pp1007-1016

[6] F. Zubedi, N. Achmad, S.L. Mahmud, R. Mowuu, “Penentuan harga beli opsi Asia menggunakan Monte Carlo-antithetic variate dan Monte Carlo-control,” *Euler : Jurnal Ilmiah Matematika, Sains dan Teknologi*, vol. 10, no. 1, pp. 7–14, 2022. https://doi.org/10.34312/euler.v10i1.12055

[7] T. Gerstner, B. Harrach, dan D. Roth, “Convergence of Milstein Brownian bridge Monte Carlo methods and stable Greeks calculation,”, 2019. [Daring]. Tersedia pada: http://arxiv.org/abs/1906.11002

[8] G.D. Ahadi dan N.N.L.E. Zain, “Pemeriksaan Uji Kenormalan dengan Kolmogorov-Smirnov, Anderson-Darling dan Shapiro-Wilk,” *Eigen Mathematics Journal*, vol. 6, no. 1, pp. 11–19, 2023. https://doi.org/10.29303/emj.v6i1.131

[9] A. Fadilah, H. Wiharno, S.N. Nurfatimah, “Pengaruh harga saham, return saham, volatilitas harga saham, ukuran perusahaan dan volume perdagangan saham terhadap bid-ask spread saham,” *Prosiding Frima (Festival Riset Ilmiah Manajemen dan Akuntansi)*, vol. 6, no. 1, pp. 212-226, 2023. https://doi.org/10.55916/frima.v0i6.448

[10] E. Reiner dan M. Rubinstein, “Breaking down the barriers,” *Risk Magazine*, vol. 4, no. 8, pp. 28–35, 1991.

[11] K. Nouri, B. Abbasi, F. Omidi, dan L. Torkzadeh, "Digital barrier options pricing: an improved Monte Carlo algorithm," *Mathematical Sciences*, vol. 10, no. 3, pp. 65–70, 2016. https://doi.org/10.1007/s40096-016-0179-8

[12] J. Bierkens, S. Grazzi, F. Van der Meulen, dan M. Schauer, "A piecewise deterministic Monte Carlo method for diffusion bridges," *Stat Comput*, vol. 31, artikel no. 37, 2021. https://doi.org/10.1007/s11222-021-10008-8