

PENGARUH MASUKNYA HAMA TERINFEKSI DALAM MODEL MANGSA-PEMANGSA HAMA TANAMAN DAN PEMAKAN HAMA

D. A. Osferi, *A. Kusnanto, P. Sianturi dan N. K. K. Ardana

Sekolah Sains Data, Matematika, dan Informatika,
Institut Pertanian Bogor, Jl. Meranti, Kampus IPB Dramaga Bogor.
daveanandaosferi@apps.ipb.ac.id, ali_mat@apps.ipb.ac.id*, psianturi@apps.ipb.ac.id,
kutha@apps.ipb.ac.id *corresponding author

Abstrak

Hubungan dinamis antara hama tanaman dan pemakan hama dapat dimodelkan dalam bentuk model mangsa dan pemangsa. Untuk menahan berkembangnya populasi hama, ditambahkan populasi hama yang terinfeksi penyakit menular. Penelitian ini bertujuan menganalisis pengaruh interaksi antara hama rentan, hama yang terinfeksi penyakit dan pemakan hama, dalam mengontrol keseluruhan populasi hama. Langkah yang dilakukan adalah *merekonstruksi* model, menganalisis kestabilan titik tetap, mencari keberadaan bifurkasi Hopf, dan melakukan simulasi numerik untuk menunjukkan kesesuaian analisis dengan solusi numeriknya. Didapat lima titik tetap bernilai positif dengan kestabilan titik tetap bergantung terhadap nilai parameter yang dipilih. Melalui simulasi numerik, terlihat bahwa parameter yang digunakan untuk mengontrol hama adalah tingkat keparahan mangsa terinfeksi penyakit, Dengan mengurangi tingkat keparahan mangsa yang terinfeksi penyakit, populasi hama akan turun sampai setengahnya.

Kata kunci: model matematika, penanggulangan hama terpadu, analisis kestabilan, pertahanan tanaman

1 Pendahuluan

Hama merupakan salah satu permasalahan utama dalam sektor pertanian karena dapat menyebabkan kerugian ekonomi yang signifikan. Salah satu metode pengendalian yang efektif adalah pendekatan pengendalian hama terpadu (PHT), yang mengombinasikan berbagai teknik, termasuk pengendalian hayati melalui model mangsa-pemangsa dengan memanfaatkan predator alami seperti burung, serangga, dan mamalia. Model mangsa-pemangsa didasarkan pada interaksi ekologis antara populasi hama sebagai mangsa dan predator alami sebagai pengendali populasi. Dalam kondisi tertentu, populasi hama dapat meningkat pesat, namun keberadaan predator mampu menekan populasi tersebut. Tanaman perumah juga berperan dalam menarik predator alami dan memperkuat efektivitas pengendalian biologis [2,3].

Pengendalian hama terpadu mengintegrasikan berbagai strategi seperti penggunaan insektisida, tanaman perumah, pendekatan biologis termasuk pemanfaatan hama terinfeksi, dan teknik lainnya. Pendekatan ini bertujuan untuk menciptakan sistem pengendalian yang berkelanjutan, sekaligus meminimalkan dampak negatif penggunaan insektisida terhadap lingkungan dan kesehatan manusia. Dalam konteks ini, pengendalian hayati melalui pemanfaatan hama terinfeksi menjadi fokus utama. Dalam implementasi

2020 Mathematics Subject Classification: 92B05, 34D20, 92D25.

Diujukan: 04/06/2025, diterima: 30/12/2024. DOI: <https://doi.org/10.29244/milang.21.1.67-74>

MILANG Journal of Mathematics and Its Applications, Vol.21, No.1, pp.67-74

ISSN: 2963-5233

PHT, pelepasan hama terinfeksi, termasuk teknik serangga steril, telah terbukti mampu mampu menurunkan populasi hama dan meningkatkan hasil tanaman. Studi dalam [2,3] menunjukkan bahwa kombinasi pelepasan wereng steril dan kumbang kepik sebagai predator dapat mengurangi kepadatan wereng coklat secara signifikan dalam ekosistem tanaman padi. Dalam penelitian [7,8] dikembangkan model pengendalian hama tanaman terpadu yang didasarkan pada model mangsa-pemangsa Leslie-Gower. Dalam model ini terdapat unsur pertahanan tanaman (tanaman yang mengeluarkan senyawa/bau) yang akan mampu mengusir sebagian hama yang ada di sekitarnya.

Model mangsa-pemangsa merupakan salah satu model populasi yang signifikan dan telah dianggap dapat memahami lingkungan alam yang bersifat fluktuatif dalam interaksi berbagai spesies [1]. Beberapa model matematis telah dikembangkan untuk menganalisis dinamika interaksi mangsa-pemangsa, termasuk yang melibatkan lebih dari dua spesies dengan perilaku saling mengganggu. Dalam penelitian [4], mempelajari model mangsa-pemangsa dengan satu mangsa dua pemangsa dan penambahan efek ketakutan pada mangsa. Dua pemangsa tersebut adalah pemangsa rentan dan pemangsa terinfeksi penyakit. Semakin meningkat infeksi antar pemangsa dapat mengakibatkan populasi mangsa dan pemangsa terinfeksi meningkat, sedangkan populasi pemangsa rentan mengalami kepunahan. Pada penelitian [5], dianalisis model eko-epidemiologi mangsa-pemangsa dengan adanya penyebaran penyakit pada populasi mangsa. Peningkatan laju kematian mangsa terinfeksi dapat menyebabkan kepunahan mangsa terinfeksi, sedangkan peningkatan daya dukung lingkungan mendorong lonjakan populasi pemangsa dan tekanan pemangsaan yang tinggi.

Hubungan antara mangsa dengan pemangsa akan memengaruhi dinamika populasi baik dalam skala kecil maupun besar. Faktor infeksi atau penyakit menular pada mangsa juga berpengaruh terhadap dinamika sistem mangsa-pemangsa. Model pertumbuhan populasi dengan penyakit yang menyebar sering kali membutuhkan persamaan matematika tidak linear yang kompleks [1]. Dalam penelitian ini akan dikembangkan model mangsa-pemangsa dengan adanya mangsa terinfeksi [6] menjadi model hama dan pemakan hama. Setelah mencari kestabilan titik tetapnya akan dilakukan simulasi numerik untuk melihat pengaruh populasi hama yang terinfeksi penyakit dalam keseluruhan dinamika populasinya.

2 Model Matematika

Model hama yang dikembangkan dalam penelitian ini, adalah pengembangan model mangsa pemangsa [6] dengan menerapkannya dalam masalah populasi hama tanaman. Asumsi-asumsi yang digunakan adalah:

1. Fungsi respon antara hama dan pemakan hama diasumsikan linear seperti dalam model Lotka-Volterra.
2. Dalam keadaan tidak ada penyakit dan predasi, laju pertumbuhan populasi hama mengikuti aturan logistik.
3. Dalam keadaan ada penyakit, populasi hama terbagi menjadi dua, yakni populasi hama sehat dan populasi hama yang terinfeksi penyakit.
4. Penyakit menyebar lewat kontak dan hanya menyebar pada populasi hama.
5. Pada populasi hama, hanya populasi hama sehat yang dapat memiliki keturunan, namun populasi hama yang terinfeksi tetap berkontribusi terhadap kapasitas lingkungan.

6. Populasi hama yang terinfeksi memiliki peluang diburu (dipredasi) yang lebih tinggi oleh pemangsa karena populasi hama yang sehat dianggap lebih aktif.

Model hama dan pemakan hama yang dimodifikasi dengan memenuhi asumsi-asumsi di atas adalah :

$$\begin{aligned}\frac{dX}{dt} &= rX \left(1 - \frac{X+Y}{k}\right) - \beta XY - p_1 XZ, \\ \frac{dY}{dt} &= \beta XY - p_2 YZ - (c + d_1)Y, \\ \frac{dZ}{dt} &= p_1 q_1 XZ + p_2 q_2 YZ - d_2 Z,\end{aligned}$$

dengan keterangan mengenai parameter sebagai berikut:

- $X(t)$: Populasi hama sehat (rentan).
- $Y(t)$: Populasi hama terinfeksi.
- $Z(t)$: Populasi pemangsa hama.
- r : Laju pertumbuhan intrinsik.
- k : Kapasitas lingkungan.
- β : Laju kontak penyakit (infeksi).
- c : Tingkat keparahan mangsa terinfeksi penyakit.
- d_1 : Laju kematian alami mangsa.
- d_2 : Tingkat pemanenan dan kematian alami pemangsa hama.
- p_1 : Koefisien predasi terhadap mangsa sehat.
- p_2 : Koefisien predasi terhadap mangsa terinfeksi.
- q_1 : Koefisien konversi pertumbuhan pemangsa akibat memangsa mangsa sehat.
- q_2 : Koefisien konversi pertumbuhan pemangsa akibat memangsa mangsa terinfeksi.

Dalam model ini diasumsikan semua parameter bernilai positif.

3 Metodologi

Penelitian ini menggunakan pendekatan analisis kestabilan terhadap titik tetap. Setelah titik tetap ditentukan, analisis kestabilannya dilakukan dengan menggunakan matriks Jacobian dan menghitung nilai eigennya [9,10]. Mengacu pada Strogatz [9], suatu titik tetap dikatakan stabil apabila seluruh nilai eigen real negatif, atau bagian real dari nilai eigen kompleks tidak lebih besar dari nol. Sebaliknya, titik tetap dianggap tidak stabil jika semua nilai eigen real positif, atau bagian real dari nilai eigen kompleks lebih besar dari nol. Titik tetap disebut titik sadel apabila terdapat hasil kali dua nilai eigen real sembarang menghasilkan bilangan negatif. Titik sadel ini termasuk dalam kategori titik tetap yang tidak stabil [10].

4 Hasil Penelitian

Titik Tetap

Titik tetap yang didapat dalam penelitian ini ada lima titik tetap :
 $E_1 = (0,0,0)$, $E_2 = (k, 0, 0)$, $E_3 = \left(\frac{d_2}{p_1 q_1}, 0, \frac{r}{p_1} \left(1 - \frac{d_2}{kp_1 q_1}\right)\right)$, $E_4 = \left(\frac{c+d_1}{\beta}, \frac{r(k\beta - c - d_1)}{\beta(r+k\beta)}, 0\right)$, dan $E_5 = (\widehat{X}_3, \widehat{Y}_2, \widehat{Z}_1)$, dengan

$$\widehat{X}_3 = \frac{d_2 r - kq_2(p_1(c+d_1) + p_2 r) + d_2 k\beta}{p_1 q_1 r - p_2 q_2 r + kp_1(q_1 - q_2)\beta}, \quad \widehat{Y}_2 = \frac{d_2 p_2 r + kp_1(-q_1(p_1(c+d_1) + p_2 r) + d_2 \beta)}{p_2 q_2}, \text{ serta}$$

$$\widehat{Z}_1 = \frac{r(c+d_1)(p_1 q_1 - p_2 q_2) + \beta(kp_1 q_1(c+d_1) - d_2 r + kp_2 q_2 r) - d_2 k\beta^2}{p_2(p_2 q_2 r - p_1(q_1 r + k\beta(q_1 - q_2)))}.$$

Kestabilan Titik Tetap

Dengan melakukan pelinearan terhadap persamaan model akan diperoleh matriks Jacobi sebagai berikut:

$$J = \begin{bmatrix} r \left(1 - \frac{2X+Y}{k}\right) - \beta Y - p_1 Z & -\frac{rX}{k} - \beta X & -p_1 X \\ \beta Y & \beta X - p_2 Z - (c+d_1) & -p_2 Y \\ p_1 q_1 Z & p_2 q_2 Z & p_1 q_1 X + p_2 q_2 Y - d_2 \end{bmatrix},$$

Lemma 1. Kestabilan titik tetap $E_1 = (0,0,0)$ adalah sadel.

Bukti: Matriks Jacobi titik tetap E_1 adalah

$$J = \begin{bmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & -c - d_1 & 0 \\ 0 & 0 & -d_2 \end{bmatrix}.$$

Diperoleh tiga nilai Eigen yakni $\lambda_1 = r$, $\lambda_2 = -(c + d_1)$, dan $\lambda_3 = -d_2$. Karena semua parameter bernilai positif, sehingga $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$, $\lambda_3 < 0$ dan perkalian dari dua buah nilai eigen real yaitu $\lambda_1 \cdot \lambda_3 < 0$ yang menyebabkan titik tetap E_1 merupakan titik tetap tak stabil (sadel).

Lemma 2. Titik tetap $E_2 = (k, 0, 0)$ adalah stabil jika jika $c > k\beta - d_1$ dan $d_2 > kp_1 q_1$.
Bukti: Matriks Jacobi dan nilai eigen titik tetap E_2 adalah

$$J = \begin{bmatrix} -r & -r - k\beta & -kp_1 \\ 0 & -c - d_1 + k\beta & 0 \\ 0 & 0 & -d_2 + kp_1 q_1 \end{bmatrix},$$

Diperoleh tiga nilai Eigen yakni $\lambda_1 = -r$, $\lambda_2 = k\beta - (c + d_1)$, dan $\lambda_3 = kp_1 q_1 - d_2$. Titik tetap ini akan stabil jika $k\beta < (c + d_1)$ dan $kp_1 q_1 < d_2$ dan tidak stabil selainnya. Berarti E_2 stabil bila $c > k\beta - d_1$ dan $d_2 > kp_1 q_1$.

Lemma 3. Titik tetap $E_3 = \left(\frac{d_2}{p_1 q_1}, 0, \frac{r}{p_1} \left(1 - \frac{d_2}{kp_1 q_1}\right)\right)$ bersifat stabil jika $d_2 < kp_1 q_1$ dan $c > \frac{d_2(p_2 r + kp_1 \beta) - kp_1 q_1(d_1 p_1 + p_2 r)}{kp_1^2 q_1}$.

Bukti: Matriks Jacobi dari E_3 berbentuk

$$J = \begin{bmatrix} -\frac{d_2 r}{kp_1 q_1} & -\frac{d_2(r+k\beta)}{kp_1 q_1} & -\frac{d_2}{q_1} \\ 0 & \frac{d_2 p_2 r + kp_1(-q_1(p_1(c+d_1) + p_2 r) + d_2 \beta)}{kp_1^2 q_1} & 0 \\ \frac{r(-d_2 + kp_1 q_1)}{kp_1} & \frac{p_2 q_2 r(-d_2 + kp_1 q_1)}{kp_1^2 q_1} & 0 \end{bmatrix}.$$

Diperoleh tiga nilai Eigen yakni $\lambda_{1,2} = \frac{-d_2 r \pm \sqrt{d_2 r[4d_2 kp_1 q_1 + d_2 r - (2kp_1 q_1)^2]}}{kp_1 q_1}$ dan $\lambda_3 = \frac{d_2(p_2 r + kp_1 \beta) - kp_1 q_1(d_1 p_1 + p_2 r)}{kp_1^2 q_1} - c$. Nilai eigen $\lambda_2 < 0$. Agar E_3 stabil maka $\lambda_{1,3} < 0$. Agar $\lambda_1 < 0$, harus dipenuhi $\sqrt{d_2 r[4d_2 kp_1 q_1 + d_2 r - (2kp_1 q_1)^2]} < d_2 r$. Hal ini berarti $d_2 r[4d_2 kp_1 q_1 - (2kp_1 q_1)^2] < 0$ atau $d_2 < kp_1 q_1$. Agar $\lambda_3 < 0$, maka $\frac{d_2(p_2 r + kp_1 \beta) - kp_1 q_1(d_1 p_1 + p_2 r)}{kp_1^2 q_1} - c < 0$ atau $c > \frac{d_2(p_2 r + kp_1 \beta) - kp_1 q_1(d_1 p_1 + p_2 r)}{kp_1^2 q_1}$.

Lemma 4. Titik tetap $E_4 = \left(\frac{c+d_1}{\beta}, \frac{r(k\beta-c-d_1)}{\beta(r+k\beta)}, 0\right)$ bersifat stabil jika $c < k\beta - d_1$ dan $d_2 > \frac{(c+d_1)(p_1 q_1 - p_2 q_2)}{\beta} + \frac{kp_2 q_2(c+d_1+r)}{r+k\beta}$.

Bukti: Jika titik tetap E_4 disubstitusikan ke dalam matriks Jacobi maka diperoleh matriks Jacobi sebagai berikut:

$$J = \begin{bmatrix} -\frac{(c+d_1)r}{k\beta} & -\frac{(c+d_1)(r+k\beta)}{k\beta} & -\frac{(c+d_1)p_1}{\beta} \\ -\frac{r(c+d_1-k\beta)}{r+k\beta} & 0 & \frac{p_2 r(c+d_1-k\beta)}{\beta(r+k\beta)} \\ 0 & 0 & -d_2 + \frac{(c+d_1)p_1 q_1}{\beta} - \frac{p_2 q_2(c+d_1-k\beta)}{\beta(r+k\beta)} \end{bmatrix}.$$

Diperoleh tiga nilai Eigen yakni $\lambda_{1,2} = -\frac{(c+d_1)r \pm \sqrt{(c+d_1)r[(c+d_1)r+4(c+d_1)k\beta-(2k\beta)^2]}}{2k\beta}$ dan $\lambda_3 = -d_2 + \frac{(c+d_1)(p_1 q_1 - p_2 q_2)}{\beta} + \frac{kp_2 q_2(c+d_1+r)}{r+k\beta}$. Nilai eigen $\lambda_2 < 0$. Agar $\lambda_1 < 0$ maka $(c+d_1)r[4(c+d_1)k\beta - (2k\beta)^2] < 0$ atau $c < k\beta - d_1$. Agar $\lambda_3 < 0$, maka $d_2 > \frac{(c+d_1)(p_1 q_1 - p_2 q_2)}{\beta} + \frac{kp_2 q_2(c+d_1+r)}{r+k\beta}$.

Dari lemma di atas, dapat diringkaskan dalam penjelasan berikut.

- Titik tetap $E_1(0,0,0)$ selalu sadel.
- Titik tetap $E_2(k, 0, 0)$ stabil jika $c > k\beta - d_1$ dan $d_2 > kp_1 q_1$.
- Titik tetap $E_3 = \left(\frac{d_2}{p_1 q_1}, 0, \frac{r}{p_1}(1 - \frac{d_2}{kp_1 q_1})\right)$ stabil jika $d_2 < kp_1 q_1$ dan $c > \frac{d_2(p_2 r + kp_1 \beta) - kp_1 q_1(d_1 p_1 + p_2 r)}{kp_1^2 q_1}$.
- Titik tetap $E_4 = \left(\frac{c+d_1}{\beta}, \frac{r(k\beta-c-d_1)}{\beta(r+k\beta)}, 0\right)$ stabil jika $c < k\beta - d_1$ dan $d_2 > \frac{(c+d_1)(p_1 q_1 - p_2 q_2)}{\beta} + \frac{kp_2 q_2(c+d_1+r)}{r+k\beta}$.

Oleh karena itu, dalam simulasi, pengontrolan populasi hama, hama terinfeksi dan pemakan hama akan dilakukan dengan mengubah nilai c dan d_2 . Kestabilan dari titik tetap E_5 akan dilihat pada bagian simulasi numerik.

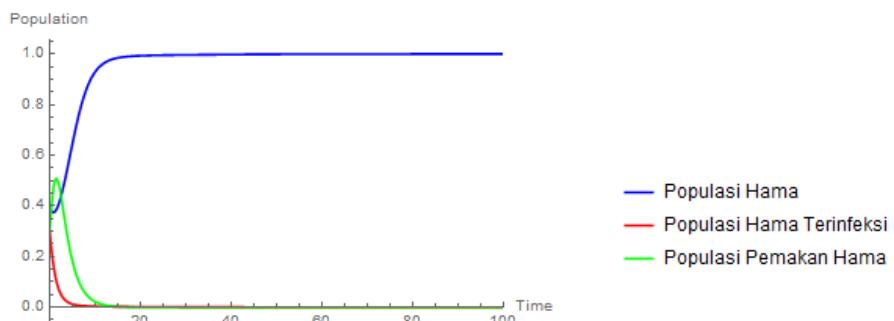
Simulasi Numerik

Pada bagian ini, akan dilakukan simulasi dengan mensubstitusikan nilai-nilai parameter yang telah ditentukan. Nilai parameter ditetapkan sebagai berikut, seperti terlihat dalam Tabel 1.

Tabel 1. Nilai-nilai parameter model

Parameter	Nama Parameter	Nilai	Satuan
r	Laju pertumbuhan intrinsik hama sehat	1/2	per hari
k	Kapasitas lingkungan	10	ekor
β	Laju kontak penyakit (infeksi)	1/2	per hari per ekor
c	Tingkat keparahan hama terinfeksi	0,8	per hari
d_1	Laju kematian alami hama sehat	1/4	per hari
d_2	Tingkat pemanenan dan laju kematian alami pemangsa hama	1/2	per hari
p_1	Koefisien predasi terhadap hama sehat	1/8	per hari per ekor
p_2	Koefisien predasi terhadap hama terinfeksi	1/2	per hari per ekor
q_1	Koefisien konversi memangsa hama sehat	1/2	-
q_2	Koefisien konversi memangsa hama terinfeksi	3/4	-

Dari nilai parameter yang dipilih, nilai $k\beta - d_1 = \frac{3}{4} > c$ dan nilai $kp_1 q_1 = \frac{1}{8} < d_2$. Dari hasil ini, berdasarkan Lemma 2, kestabilan akan berada di titik tetap $E_2(1,0,0)$. Dengan memberikan nilai awal $X(0) = 0.4$ (40%), $Y(0) = 0.3$ (30%), dan $Z(0) = 0.3$ (30%), hasil simulasi solusinya dapat dilihat seperti pada Gambar 1. Populasi hama akan menuju ke 1 (100%), sehingga populasi hanya terinfeksi dan populasi pemakan hama akan punah menuju 0. Berarti dengan kondisi ini, populasi hama tetap menyebar tidak terkendali.



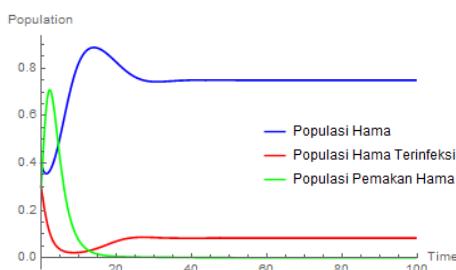
Gambar 1 Bidang solusi $c = 0.8$

Dari Gambar 1 terlihat bahwa populasi hama yang terinfeksi dan pemakan hama akan menurun dan lama kelamaan habis (punah). Untuk menanggulangi masalah ini, akan dilakukan simulasi terhadap nilai parameter c (tingkat keparahan hama terinfeksi).

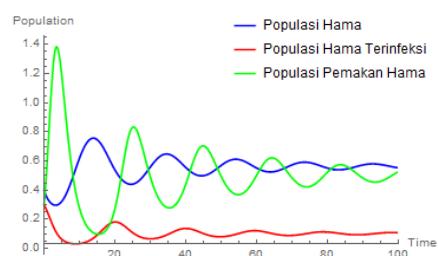
Dalam simulasi ini tingkat keparahan hama terinfeksi akan diturunkan, yang berarti bahwa populasi hama yang berpenyakit yang disebar dalam lingkungan tersebut adalah yang tingkat keparahan penyakitnya menurun. Dalam kondisi nilai $c = 0,8$ berarti tingkat keparahan terinfeksinya cukup tinggi yang negakibatkan populasi hama terinfeksi akan menurun drastis. Dengan menurunkan tingkat keparahan populasi hama yang terinfeksi, diharapkan tingkat hidup hama ini lebih tinggi sehingga banyak berinteraksi dengan hama sehat yang mengakibatkan hama sehat menjadi sakit. Simulasi akan dilakukan dengan memilih $c = 0,5$, dan $c = 0,25$.

Ketika tingkat keparahan hama terinfeksi diturunkan menjadi $c = 0,5$ berakibat nilai $c < k\beta - d_1$ ($k\beta - d_1 = \frac{3}{4}$) dan $d_2 > \frac{(c+d_1)(p_1q_1-p_2q_2)}{\beta} + \frac{kp_2q_2(c+d_1+r)}{r+k\beta}$. Sehingga, berdasarkan Lemma 4 mengakibatkan terjadinya perubahan kestabilan titik tetap pada model, yang semula E_2 stabil bergeser menjadi tak stabil dan E_4 yang stabil seperti terlihat dalam Gambar 2. Dalam hal ini populasi pemakan hama akan turun terus dan punah sedangkan populasi hama tetap ada dalam lingkungan tersebut walaupun sudah menurun.

Jika nilai c ini diturunkan lagi menjadi $c = 0,25$, kondisi kestabilan titik tetap E_1 s.d. E_4 tidak terpenuhi. Hal ini berakibat, titik tetap yang stabil adalah E_5 . Akibatnya populasi pemakan hama akan naik dan eksis sedangkan populasi hama semakin berkurang, seperti terlihat dalam Gambar 3. Kondisi seperti ini menjadi kondisi yang diinginkan karena populasi hama menurun drastic dan populasi pemakan hama tetap eksis walaupun juga terjadi penurunan.



Gambar 2 Bidang solusi $c = 0,5$



Gambar 3 Bidang solusi $c = 0,25$

Dari hasil simulasi di atas, terlihat bahwa untuk mengontrol populasi hama, dapat digunakan hama yang terinfeksi ke dalam lingkungan populasi. Dengan pemilihan tingkat keterinfeksian populasi hama, maka populasi hama secara keseluruhan akan menurun bahkan bisa sampai setengahnya.

5 Simpulan

Dalam penelitian ini, telah dikembangkan model mangsa-pemangsa menjadi model hama terpadu. Dalam model ini ada tiga populasi yang terlibat yaitu populasi hama, hama terinfeksi penyakit dan populasi pemangsa hama. Diperoleh lima titik tetap yang kestabilannya bergantung pada nilai parameter yang dipilih.

Dalam penelitian ini dan dengan memilih parameter tertentu, mengakibat terjadinya dinamika perubahan titik tetap yang berpengaruh terhadap punah/tidaknya populasi. Dengan memilih tingkat keparahan tinggi maka populasi hama terinfeksi dan populasi pemakan hama akan punah sedangkan populasi hama akan meningkat.

Untuk menanggulangi lonjakan populasi hama, dilakukan perubahan parameter tingkat keparahan populasi hama yang terkena penyakit. Dengan menurunkan tingkat keparahan penyakit hama, maka populasi hama akan menurun dan populasi pemakan hama akan tetap ada. Dalam hal ini koeksistensi ketiga populasi akan terjadi.

Daftar Pustaka

- [1] Alabacy ZK, Majeed AA. 2020. The fear effect on a food chain prey-predator model incorporating a prey refuge and harvesting. *Journal of Physics: Conference Series*.
- [2] Bakhtiar T, Fitri IR, Hanum F, Kusnanto A. Mathematical Model of Pest Control Using Different Release Rates of Sterile Insects and Natural Enemies. *Mathematics* **2022**, *10*, 883. <https://doi.org/10.3390/math10060883>
- [3] Fitri IR, Hanum F, Kusnanto A, Bakhtiar T. Optimal Pest Control Strategies with Cost-effectiveness Analysis, *The Scientific World Journal*, vol. 2021, Article ID 6630193, 17 pages, 2021. <https://doi.org/10.1155/2021/6630193>
- [4] Barman D, Roy J, Alam S. 2020. Dynamical behaviour of an infected predator-prey model with fear effect. *Iran J Sci Technol Trans Sci*. **45**: 309-325. doi: 10.1007/s40995-020-01014-y.
- [5] Greenhalgh D, Khan QJA, Al-Kharousi FA. 2020. Eco-Epidemiological Model with Fatal Disease in the Prey. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*. **53**: 103072. doi: <https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2019.103072>.
- [6] Kant S, Kumar V. 2017. Dynamics of a prey-predator system with infection in prey. *Electronic Journal of Differential Equations*. 2017(209): 1-27.
- [7] Kusnanto A, Siswandi, Juharuddin, Hanum F. 2023. Pengaruh Pertahanan Tanaman Dalam Pengusiran Hama Pada Model Penanggulangan Hama Tanaman Terpadu. *MILANG Journal of Mathematics and Applications*. Vol. 19 No. 1 (2023): 43-51. <https://doi.org/10.29244/milang.19.1.43-51>
- [8] Mishra P. 2018. Study of a Leslie-Gower predator-prey model with prey defense and mutual interference of predators. *Nonlinear Science, Nonequilibrium, and Complex Phenomena*, **120**:1-16. doi: 10.1016/j.chaos.2019.01.012 .
- [9] Strogatz SH. 2024. *Nonlinear Dynamics and Chaos, with Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*. 3th ed. Boca Raton: Chapman and Hall/CRC.
- [10] Zwillinger D, Dobrushkin V. 2022. *Handbook of Differential Equations*. Ed ke-8. Boca Raton (FL): CRC Press. doi: 10.1201/9780429286834.