

PERBAIKAN METODE KRIGING BIASA (*ORDINARY KRIGING*) MELALUI PEMECAHAN MATRIKS C MENJADI BEBERAPA ANAK MATRIKS NON OVERLAP UNTUK MEWAKILI DRIFT PADA PEUBAH SPASIAL

Muhammad Nur Aidi
Departemen Statistika FMIPA IPB

Indra Saufitra

Abstrak

Persoalan dalam pendugaan spasial dengan menggunakan konsep drift sering kali menemui kendala bila kondisi permukaan yang diduga bersifat anisotropik. Pada kondisi anisotropik kurangnya tepat apabila hanya menggunakan satu model korelogram (variogram). Dalam tulisan ini dicoba area yang diteliti dibagi menjadi beberapa partisi (4 partisi) sehingga disusun empat model variogram untuk keseluruhan area. Dari empat partisi tersebut dicari nilai-nilai total pembobot yang layak agar fungsi penduga menjadi tak bias. Selanjutnya dilakukan perbandingan pendugaan nilai pada titik-titik yang tidak dilakukan pengukuran antara tanpa partisi dengan partisi. Hasil pendugaan menunjukkan bahwa nilai dugaan sama dengan nilai sebenarnya baik yang tak dipartisi maupun yang dipartisi. Akan tetapi, nilai pendugaan yang dihasilkan dari area yang dipartisi lebih baik dibandingkan tanpa partisi.

Kata kunci : Drift, Anisotropik, Fungsi Kovarian, Variogram, Jackknife, Simulasi

PENDAHULUAN

Analisis spasial pada bidang sumberdaya alam dan lingkungan sering kali mengikuti dua asumsi, yakni : a. peubah spasial yang disajikan oleh sumberdaya alam dan lingkungan mempunyai sifat spasial kontinuitas yakni pada setiap titik di ruang wilayah selalu ditemui data tersebut artinya secara ruang dalam populasi tersebut selalu ditemui nilai-nilainya. Sebagai contoh, yakni akan ditemui pada setiap titik di bentang alam adanya air tanah. Contoh lain yakni pada setiap titik di udara akan ditemui konsentrasi tertentu unsur udara atau embun air. Sifat ini agak berbeda dengan peubah spasial pada aspek demografi, dimana sifat spasial kontinuitas tidak ditemui. Tidak mungkin pada setiap titik di muka bumi ditemui manusia. b) Asumsi kedua adalah adanya kecenderungan tertentu dari peubah spasial pada arah dan jarak tertentu, yang sering disebut adanya *drift*.

Asumsi ini dikembangkan karena secara umum peubah spasial mempunyai tiga ciri utama (Richard A. Olea. 1975) yakni :

- Lokalisasi : sebuah peubah spasial didefinisikan secara numerik sebagai sebuah nilai yang berasosiasi dengan contoh dari ukuran, bentuk dan orientasi yang spesifik. Ciri geometris dari contoh ini disebut dukungan geometris (*geometric support*). Sebuah bidang geometris (*geometric field*) merupakan volume yang lebih besar yang didapatkan dari contoh. Dukungan dan bidang geometris tidak langsung membangun volume melainkan membangun area, garis, dan interval waktu. Ketika ukuran dukungan geometris

mendekati nol, akan didapatkan sebuah titik contoh (*punctual sample*) dan dukungan geometris bersifat immaterial.

- Anisotropi : perubahan nilai terjadi secara gradual dalam satu arah tertentu dan *irregular* pada arah yang lain.
- Kontinuitas : variasi spasial dari peubah regional terjadi dari sangat kecil sampai sangat besar tergantung dari fenomena. Biasanya digunakan kontinuitas rata-rata.

Untuk menangkap sifat peubah spasial yakni *drift* dilakukan dengan menduga fungsi variogram atau fungsi korelogram yang merupakan fungsi dari jarak dan arah (Isaaks, E.H. & R. M. Srivastava. 1989; Cressie, N. A. C. 1991; Hans Wackernagel. 1995), sedangkan untuk mendapatkan nilai dugaan yang minimum variance dilakukan melalui pendekatan Pengganda Lagrange (Isaaks, E.H. & R. M. Srivastava. 1989; Cressie, N. A. C. 1991; Hans Wackernagel. 1995; K.G. v.d. Boogaart. (Mathematics and Computer Sciences in Geology, Freiberg University of Mining and Technology, BvCotta-Str 2, D-09596 Freiberg, Germany). Sedangkan pendugaan bersifat tidak bias dicapai bila jumlah total pembobot W_i adalah satu.

Dalam teori peubah spasial atau peubah regional yang memperhatikan distribusi peubah secara spasial, konsep *drift* merupakan salah satu topik terpenting dari sebuah fungsi. *Drift* merepresentasikan kecenderungan (*trend*) sebuah fungsi secara geometri. *Drift* harus menyatakan ciri utama saja dan lebih menyatakan sebuah kenampakan sistematis daripada menyatakan

detil yang menyebar (*spradis*). Untuk mengukur *drift* digunakan suatu model kovarian berbentuk suatu fungsi eksponensial. Kovarian dilambangkan dengan $C(h)$. *Kovarian* merupakan rata-rata selisih antara pasangan nilai data dengan rata-rata yang dikuadratkan

$$C(h) = \frac{1}{N(h)} \sum_{(i,j) \in h} (v_i v_j - m_{-h} m_{+h})^2 \dots\dots\dots 1a$$

dengan :

$$m_{-h} = \frac{1}{N(h)} \sum_{i|h_j=h} v_i \text{ dan } m_{+h} = \frac{1}{N(h)} \sum_{j|h_i=h} v_j$$

$$\text{dengan : } N(h) \equiv n\{(i, j); x_i - x_j = h\}$$

(Issacs & Srivastava, 1989)

Nilai kovarian dari lokasi yang dilakukan pengamatan (persamaan 1a) kemudian di plotkan dengan jarak maka akan dapat dibangun model kovarian pada persamaan berikut

$$\tilde{C}(h) = \begin{cases} C_0 + C_1, & \text{untuk } |h| = 0 \\ C_1 \exp\left(\frac{-3|h|}{a}\right), & \text{untuk } |h| > 0 \end{cases} \dots\dots\dots 1b$$

Selanjutnya untuk menduga nilai pada titik yang tidak dilakukan pengukuran (X_0) dilakukan melalui persamaan

$$\hat{V}(X_0) = \sum W_i V(X_i) \dots\dots\dots 2$$

Untuk itu perlu dilakukan pendugaan pembobot W_i pada persamaan 2 di atas. Pembobotan ini akan didapatkan dengan menggunakan fungsi sebagai berikut :

$$CW = D$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{C}_{11} & \dots & \tilde{C}_{1n} & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \tilde{C}_{n1} & \dots & \tilde{C}_{nn} & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{C}_{10} \\ \vdots \\ \tilde{C}_{n0} \\ 1 \end{bmatrix} \dots\dots\dots 3$$

$\downarrow$
C

$\downarrow$
W

$\downarrow$
D

Nilai C_{ij} didapatkan dengan memasukkan nilai-nilai jarak antar pengamatan (lokasi yang telah dilakukan pengukuran) ke dalam model persamaan 1b. Dengan menggunakan persamaan 3 akan didapatkan nilai W_i yakni

$$W = C^{-1} D \dots\dots\dots 4$$

Ada beberapa persoalan akan timbul pada saat menggunakan model Kriging, antara lain :

- a. Pada kenyataannya bahwa nilai-nilai peubah spasial pada suatu ruang (katakan dua dimensi) akan mempunyai titik spasial yang tak terhingga. Akibatnya untuk mempertahankan *drift* pada ruang spasial digunakan satu model korelogram atau variogram akibatnya untuk menduga nilai peubah spasial pada satu titik saja menggunakan matriks korelogram yang sangat besar. Padahal titik-titik

yang akan diduga nilai peubah spasialnya pada suatu ruang sangatlah banyak.

- b. Untuk mempertahankan ruang populasi dengan hanya satu fungsi korelogram atau variogram sering tidak bisa dicapai karena pada kenyataannya dalam satu ruang populasi drift tidak hanya satu kecenderungan saja namun ada lebih dari satu pola kecenderungan. Bila kenyataannya lapang menunjukkan lebih dari satu pola kecenderungan nilai peubah spasial, tapi tetap dipertahankan satu fungsi drift akan mengakibatkan terjadi kesalahan pendugaan yang sangat besar. Hal ini telah dibuktikan dari hasil simulasi Hardiansyah dan Nur Aidi (2001) dalam studi skripsi.

Pada kondisi yang mempunyai satu arah, maka model variogramnya cukup menggunakan satu model saja sehingga pengolahan matriks dalam persamaan cukup menggunakan satu pengolahan matriks. Dalam kenyataannya bahwa pola besar tersusun atas pola-pola kecil. Pola yang kecil mempunyai fungsi variogram yang mungkin berbeda dengan bentukan besar. Model *Kriging Biasa* biasanya hanya memperhatikan bentukan besar saja tanpa mempertimbangkan adanya bentukan-bentukan kecil. Oleh karena itu model *Kriging Biasa* yang ada akan diperluas supaya bisa digunakan untuk pola yang anisotropik.

TUJUAN DAN MANFAAT

Dengan memperhatikan dua keadaan yakni kondisi isotropic dan anisotropic di atas maka selayaknya dikembangkan suatu perbaikan terhadap proses pendugaan di dalam model Kriging yakni dengan memotong Matriks **C** menjadi anak matriks-anak matriks yang tidak overlap dimana setiap anak matriks menggambarkan satu pola kenderungan nilai peubah spasial (satu drift). Dengan demikian tujuan penelitian ini adalah :

1. Melakukan kajian teoretis dan survai literature (penurunan secara matematik) pendugaan titik-titik spasial dengan metode kriging dimana matriks **C** telah dipotong-potong menjadi anak matriks-anak matriks dimana setiap anak matriks menggambarkan satu pola kecenderungan nilai peubah spasial (*drift*).
2. Melakukan uji simulasi pendugaan titik-titik peubah spasial dengan kriging biasa (*Ordinary Kriging*) dimana Matriks **C** tidak dilakukan pemotongan menjadi beberapa anak matriks-anak matriks dengan kondisi satu, dua, dan tiga pola kecenderungan peubah spasial.
3. Melakukan uji simulasi pendugaan titik-titik peubah spasial dengan kriging biasa (*Ordinary Kriging*) dimana Matriks **C** telah dilakukan pemotongan menjadi beberapa anak matriks-anak matriks dengan kondisi satu, dua, dan tiga pola kecenderungan peubah spasial.
4. Melakukan pengujian tingkat akurasi pada simulasi nomor 2 dan 3 di atas.

Hasil yang didapatkan adalah (1) Model matematika Kriging Biasa dengan modifikasi matriks **C** terpartisi sesuai dengan kondisi driftnya serta formulasi galat dari model tersebut, (2) Bukti yang meyakinkan akan kebaikan model Kriging biasa dengan matriks **C** terpartisi bila menemui bahwa pada populasi spasial terdapat lebih dari satu pola kecenderungan nilai peubah spasial dengan menggunakan teknik simulasi secara komputasi, 3) Suatu prosedur untuk mengukur tingkat akurasi pendugaan spasial tanpa dilakukan check lapang.

Manfaat yang diharapkan dari penelitian ini adalah akan didapatkan suatu teknik pendugaan yang lebih akurat dan lebih sederhana sehubungan pendugaan spasial pada kondisi yang *anisotropic*. Selain itu dengan diketahuinya prosedur pengukuran akurasi tanpa dilakukan pengecekan lapang dengan metode jackknife.

METODE PENELITIAN

Survei Literature

Dalam survei literature ini dilakukan kajian secara matematika baik dari literature yang di download dari internet maupun studi pustaka di perpustakaan-perpustakaan. Selain itu dilakukan pula kajian matematika secara mandiri dimana matriks **C** dicoba dipartisi menjadi dua, tiga, dan empat. Dengan terpartisinya matriks **C** secara otomatis vektor **D** juga akan terpartisi.

Proses kajian matematika ditelusuri sampai mendapatkan (a). Bobot Kriging agar minimum variance dan tak bias, dan (b). Variance pada bobot kriging dengan minimum variance dan tak bias.

Simulasi

Pada suatu area dengan ukuran $n \times n$ titik spasial dengan peubah spasial tertentu. Pada ukuran area $n \times n$ dibuat empat tipe drift yakni masing-masing ukuran $\frac{1}{2} n \times \frac{1}{2} n$ titik spasial. Ada empat tipe tindakan pada simulasi ini yakni : 1) Pada kondisi pertama dibangun satu fungsi korelogram untuk menampung empat drift tersebut lalu dilakukan pendugaan pada nilai peubah spasial pada titik nol, 2) Pada kondisi kedua dibangun empat fungsi korelogram untuk menampung empat drift tersebut lalu dilakukan pendugaan pada nilai peubah spasial pada titik nol. Pada setiap tipe simulasi di atas diukur nilai residualnya dan diperbandingkan nilai residual masing-masing tipe simulasi di atas.

Simulasi untuk Menghitung Akurasi

Diberikan suatu contoh sembarang $V = (V_1, V_2, \dots, V_n)$ dimana mengikuti pola empat drift. Dari contoh tersebut dilakukan *resample* (penarikan ulang contoh) sebanyak n kali dimana setiap *resample* terdiri dari $n-1$ pengamatan (terhapus 1 pengamatan secara berturut-turut). Misalkan $V(i)$ adalah himpunan data *resample* ke i

$V(i) = (V_1, V_2, \dots, V(i-1), V(i+1), \dots, V(n))$ untuk $i=1, 2, \dots, n$ disebut sebagai contoh *jackknife*. Andaikan pula $\hat{O}(i) = t(X_i)$ adalah statistik yang dimaksud, maka

dari himpunan $\hat{O}(1), \hat{O}(2), \dots, \hat{O}(n)$; maka penduga simpangan baku *Jackknife* adalah

$$S_{\text{jack}} = \{(n-1)/n \sum (\hat{O}(i) - \hat{O}(\cdot))^2\}^{1/2} \dots\dots\dots 5$$

dengan $\hat{O}(\cdot) = 1/n \sum \hat{O}(i)$

HASIL DAN PEMBAHASAN

Kajian Teoritis

Ordinary Kriging dengan Dua Buah Matriks Partisi

Jika area ruang contoh terdiri atas dua trend yang secara ideal terletak pada luasan yang berdampingan, katakan pada area M_1 dan pada area M_2 . Dengan demikian dapat dikatakan bahwa area ruang contoh terpartisi dua. Kondisi trend di M_1 diwujudkan melalui model kovarian pertama dan kondisi trend di M_2 diwujudkan melalui model kovarian kedua. Selanjutnya dilakukan pendugaan peubah regional V pada x_0 yang melibatkan dua partisi area tersebut.

Model pendugaan pada $\hat{V}(x_0)$ dapat dituliskan sebagai berikut

$$\hat{v}(x_0) = \sum_{i=1}^{k_1} a_i v(x_i) + \sum_{s=1}^{k_2} b_s v(x_s) \dots\dots\dots 6$$

dengan

- $\hat{V}(x_0)$ adalah nilai dugaan V di x_0
- $a_i, i = 1, 2, \dots, k_1$ adalah bobot yang ditetapkan untuk titik contoh $V(x_i)$ pada zona kesatu.
- $b_s, s = 1, 2, \dots, k_2$ adalah bobot yang ditetapkan untuk titik contoh $V(x_s)$ pada zona kedua.

Galat (bias)-nya diperoleh :

$$R(x_0) = \hat{v}(x_0) - v(x_0) \\ = \left(\sum_{i=1}^{k_1} a_i v(x_i) + \sum_{s=1}^{k_2} b_s v(x_s) \right) - v(x_0) \dots\dots\dots 7$$

Metode *ordinary kriging* menghasilkan dugaan dengan ragam galat minimum. Ragam galatnya dapat dituliskan sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \text{Var}(R(x_0)) &= \text{Var}(\hat{v}(x_0) - v(x_0)) = \\ \text{Var} \left(\left(\sum_{i=1}^{k_1} a_i v(x_i) + \sum_{s=1}^{k_2} b_s v(x_s) \right) - v(x_0) \right) \\ &= \hat{\sigma}^2 + \sum_{i=1}^{k_1} \sum_{j=1}^{k_1'} a_i a_j \tilde{C}_{ij} + \sum_{s=1}^{k_2} \sum_{j=1}^{k_2'} b_s b_j \tilde{C}_{sj} \\ &\quad - 2 \sum_{i=1}^{k_1} a_i \tilde{C}_{i0} - 2 \sum_{s=1}^{k_2} b_s \tilde{C}_{s0} \dots\dots\dots 8 \end{aligned}$$

Kemudian dengan Pengganda Lagrange didapatkan sebagai berikut

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}^2_R &= \hat{\sigma}^2 + \sum_{i=1}^{k_1} \sum_{j=1}^{k_1'} a_i a_j \tilde{C}_{ij} + \sum_{s=1}^{k_2} \sum_{j=1}^{k_2'} b_s b_j \tilde{C}_{sj} \\ &\quad - 2 \sum_{i=1}^{k_1} a_i \tilde{C}_{i0} - 2 \sum_{s=1}^{k_2} b_s \tilde{C}_{s0} \end{aligned}$$

$$+2\lambda_1\left(\sum_{i=1}^{k_1}a_i-1/2\right)+2\lambda_2\left(\sum_{s=1}^{k_2}b_s-1/2\right) \dots\dots\dots 9$$

dengan

λ_1, λ_2 adalah Pengganda Lagrange

Untuk meminimumkan ragam galat dilakukan dengan menghitung turunan parsial pertama terhadap persamaan 9 di atas dan menetapkan masing-masing turunan parsial pertama sama dengan nol. Hasilnya adalah sebagai berikut :

$$\frac{\partial \hat{\sigma}^2_R}{\partial a_i} = 0, \text{ maka}$$

$$\sum_{i=1}^{k_1} a_j \tilde{C}_{ij} + \lambda_1 = \tilde{C}_{i0}, j = 1, 2, \dots, k_1' \dots\dots 10$$

$$\frac{\partial \hat{\sigma}^2_R}{\partial b_s} = 0, \text{ maka}$$

$$\sum_{s=1}^{k_2} b_j \tilde{C}_{sj} + \lambda_2 = \tilde{C}_{s0}, j = 1, 2, \dots, k_2' \dots\dots 11$$

dan

$$\frac{\partial \hat{\sigma}^2_R}{\partial \lambda_1} = 0, \text{ maka } \sum_{i=1}^{k_1} a_i = \frac{1}{2} \dots\dots\dots 12$$

$$\frac{\partial \hat{\sigma}^2_R}{\partial \lambda_2} = 0, \sum_{s=1}^{k_2} b_s = \frac{1}{2} \dots\dots\dots 13$$

Masing-masing pembobot sebesar $\frac{1}{2}$ akan mengakibatkan bahwa pendugaan yang dihasilkan tidak bias. Bukti bahwa pendugaan yang dihasilkan tidak bias adalah berikut :

$$\begin{aligned} E\{\hat{V}(x_0)\} &= E\left\{\sum_{i=1}^{k_1} a_i v(x_i) + \sum_{s=1}^{k_2} b_s v(x_s)\right\} \\ &= \sum_{i=1}^{k_1} a_i E(v_i) + \sum_{s=1}^{k_2} b_s E(v_s) \dots\dots 14 \end{aligned}$$

V bersifat stasioner sehingga $E(v_i) = E(v_s) = E(v)$. Maka

$$\begin{aligned} E\{\hat{V}(x_0)\} &= \sum_{i=1}^{k_1} a_i E(v) + \sum_{s=1}^{k_2} b_s E(v) \\ &= \frac{1}{2} E(v) + \frac{1}{2} E(v) \\ &= E(v) \dots\dots\dots 15 \end{aligned}$$

Jadi terbukti dengan $\sum_{i=1}^{k_1} a_i = \frac{1}{2}$ dan $\sum_{s=1}^{k_2} b_s = \frac{1}{2}$ pendugaan yang dihasilkan merupakan penduga tak bias.

Matriks kovarian partisi pertama yang dihasilkan adalah

$$\begin{bmatrix} \tilde{C}_{11} & \dots & \tilde{C}_{1k_1} & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \tilde{C}_{k_11} & \dots & \tilde{C}_{k_1k_1} & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{k_1} \\ \lambda_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{C}_{10} \\ \vdots \\ \tilde{C}_{k_10} \\ 1/2 \end{bmatrix} \dots\dots\dots 16$$

$\downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \downarrow$
 $C_1 \qquad \qquad \qquad W_1 \qquad \qquad D_1$

Matriks kovarian partisi kedua yang dihasilkan adalah

$$\begin{bmatrix} \tilde{C}_{11} & \dots & \tilde{C}_{1k_2} & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \tilde{C}_{k_21} & \dots & \tilde{C}_{k_2k_2} & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_{k_2} \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{C}_{10} \\ \vdots \\ \tilde{C}_{k_20} \\ 1/2 \end{bmatrix} \dots\dots\dots 17$$

$\downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \downarrow$
 $C_2 \qquad \qquad \qquad W_2 \qquad \qquad D_2$

Selanjutnya sistem persamaan *ordinary kriging* dengan dua partisi adalah sebagai berikut :

$$\begin{pmatrix} \hat{C}_{11} & \dots & \hat{C}_{1k_1} & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hat{C}_{k_11} & \dots & \hat{C}_{k_1k_1} & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \hat{C}_{11} & \dots & \hat{C}_{1k_2} & 0 & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \hat{C}_{k_21} & \dots & \hat{C}_{k_2k_2} & 0 & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{k_1} \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{k_2} \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{C}_{10} \\ \vdots \\ \hat{C}_{k_10} \\ \hat{C}_{10} \\ \vdots \\ \hat{C}_{k_20} \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \dots\dots\dots 18$$

Ordinary Kriging dengan Empat Buah Matriks Partisi

Jika area ruang contoh terdiri atas empat trend yang secara ideal terletak pada luasan yang berdampingan, katakan pada area M1, area M2, area M3, dan area M4. Dengan demikian dapat dikatakan bahwa area ruang contoh terpartisi empat. Kondisi trend di M1 diwujudkan melalui model kovarian pertama, kondisi trend di M2 diwujudkan melalui model kovarian kedua dan seterusnya hingga partisi ke empat. Selanjutnya dilakukan pendugaan peubah regional V pada x_0 yang melibatkan dua partisi area tersebut.

Model pendugaan pada $\hat{V}(x_0)$ dapat dituliskan sebagai berikut

$$\begin{aligned} \hat{v}(x_0) &= \sum_{i=1}^{k_1} a_i v(x_i) + \sum_{s=1}^{k_2} b_s v(x_s) + \sum_{k=1}^{k_3} c_k v(x_k) \\ &\quad + \sum_{l=1}^{k_4} d_l v(x_l) \dots\dots\dots 19 \end{aligned}$$

dengan :

- $\hat{v}(x_0)$ adalah nilai dugaan $v(x_0)$
- $a_i, i = 1, 2, \dots, k_1$ adalah bobot yang ditetapkan untuk titik contoh $V(x_i)$ pada zona kesatu.
- $b_s, s = 1, 2, \dots, k_2$ adalah bobot yang ditetapkan untuk titik contoh $V(x_s)$ pada zona kedua.

- $c_k, k=1,2,\dots,k_3$ adalah bobot yang ditetapkan untuk titik contoh $V(x_k)$ pada zona ketiga.
- $d_l, l=1,2,\dots,k_4$ adalah bobot yang ditetapkan untuk titik contoh $V(x_l)$ pada zona keempat.

Galat (bias)-nya diperoleh :

$$R(x_0) = \hat{v}(x_0) - v(x_0)$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{k_1} a_i v(x_i) + \sum_{s=1}^{k_2} b_s v(x_s) + \sum_{k=1}^{k_3} c_k v(x_k) + \sum_{l=1}^{k_4} d_l v(x_l) \right) - v(x_0)$$

.....20

Ragam galat-nya adalah :

$$\text{Var}(R(x_0)) = \text{Var}(\hat{v}(x_0) - v(x_0))$$

$$= \sigma^2 + \sum_{i=1}^{k_1} \sum_{j=1}^{k_1'} a_i a_j \tilde{C}_{ij} + \sum_{s=1}^{k_2} \sum_{j=1}^{k_2'} b_s b_j \tilde{C}_{sj} + \sum_{k=1}^{k_3} \sum_{j=1}^{k_3'} c_k c_j \tilde{C}_{kj}$$

$$+ \sum_{l=1}^{k_4} \sum_{j=1}^{k_4'} d_l d_j \tilde{C}_{lj} - 2 \sum_{i=1}^{k_1} a_i \tilde{C}_{i0} - 2 \sum_{s=1}^{k_2} b_s \tilde{C}_{s0} - 2 \sum_{k=1}^{k_3} c_k \tilde{C}_{k0}$$

$$- 2 \sum_{l=1}^{k_4} d_l \tilde{C}_{l0} \dots\dots\dots 21$$

Dengan mengasumsikan bahwa pendugaan tak bias (*unbiased*) sepotong-sepotong, maka ragam galat menjadi :

$$\tilde{\sigma}_R^2 = \sigma^2 + \sum_{i=1}^{k_1} \sum_{j=1}^{k_1'} a_i a_j \tilde{C}_{ij} + \sum_{s=1}^{k_2} \sum_{j=1}^{k_2'} b_s b_j \tilde{C}_{sj} + \sum_{k=1}^{k_3} \sum_{j=1}^{k_3'} c_k c_j \tilde{C}_{kj}$$

$$+ \sum_{l=1}^{k_4} \sum_{j=1}^{k_4'} d_l d_j \tilde{C}_{lj} - 2 \sum_{i=1}^{k_1} a_i \tilde{C}_{i0} - 2 \sum_{s=1}^{k_2} b_s \tilde{C}_{s0}$$

$$- 2 \sum_{k=1}^{k_3} c_k \tilde{C}_{k0} - 2 \sum_{l=1}^{k_4} d_l \tilde{C}_{l0} + 2 \lambda_1 \left(\sum_{i=1}^{k_1} a_i - \frac{1}{4} \right)$$

$$+ 2 \lambda_2 \left(\sum_{s=1}^{k_2} b_s - \frac{1}{4} \right) + 2 \lambda_3 \left(\sum_{k=1}^{k_3} c_k - \frac{1}{4} \right) + 2 \lambda_4 \left(\sum_{l=1}^{k_4} d_l - \frac{1}{4} \right) \dots\dots\dots 22$$

dengan :

- $\tilde{\sigma}^2$ adalah kovariansi dari peubah acak $V(x_0)$ dengan dirinya sendiri dan kita asumsikan bahwa semua peubah acak mempunyai ragam yang sama.
- $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ adalah parameter *lagrange*.

Selanjutnya kita meminimisasikan ragam galat pada persamaan (22) di atas, diperoleh persamaan-persamaan turunan parsial pertama dari bobot dan parameter *lagrange*-nya :

$$\sum_{i=1}^{k_1} a_j \tilde{C}_{ij} + \lambda_1 = \tilde{C}_{i0}, j=1,2,\dots,k_1 \dots\dots\dots 23$$

$$\sum_{s=1}^{k_2} b_j \tilde{C}_{sj} + \lambda_2 = \tilde{C}_{s0}, j=1,2,\dots,k_2 \dots\dots\dots 24$$

$$\sum_{k=1}^{k_3} c_j \tilde{C}_{kj} + \lambda_3 = \tilde{C}_{k0}, j=1,2,\dots,k_3 \dots\dots\dots 25$$

$$\sum_{l=1}^{k_4} d_j \tilde{C}_{lj} + \lambda_4 = \tilde{C}_{l0}, j=1,2,\dots,k_4 \dots\dots\dots 26$$

$$\sum_{i=1}^{k_1} a_i = \frac{1}{4}, \sum_{s=1}^{k_2} b_s = \frac{1}{4}, \sum_{k=1}^{k_3} c_k = \frac{1}{4}, \sum_{l=1}^{k_4} d_l = \frac{1}{4} \dots\dots\dots 27$$

Kemudian dibuktikan bahwa dengan pembobot pada persamaan 27, penduga akan bersifat tak bias. Bukti tersebut adalah sebagai berikut :

$$E\{\hat{v}(x_0)\} = E\left\{ \sum_{i=1}^{k_1} a_i v(x_i) + \sum_{s=1}^{k_2} b_s v(x_s) + \sum_{k=1}^{k_3} c_k v(x_k) + \sum_{l=1}^{k_4} d_l v(x_l) \right\}$$

$$= \sum_{i=1}^{k_1} a_i E(v_i) + \sum_{s=1}^{k_2} b_s E(v_s) + \sum_{k=1}^{k_3} c_k E(v_k) + \sum_{l=1}^{k_4} d_l E(v_l)$$

V bersifat stasioner sehingga $E(v_i) = E(v_s) = E(v_k) = E(v_l) = E(v)$

$$E\{\hat{v}(x_0)\} = \frac{1}{4} E(v) + \frac{1}{4} E(v) + \frac{1}{4} E(v) + \frac{1}{4} E(v)$$

$$= E(v) \dots\dots\dots 28$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{C}_{11} & \dots & \tilde{C}_{1k_1'} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \tilde{C}_{k_1 1} & \dots & \tilde{C}_{k_1 k_1'} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \tilde{C}_{11} & \dots & \tilde{C}_{1k_2'} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \tilde{C}_{k_2 1} & \dots & \tilde{C}_{k_2 k_2'} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \tilde{C}_{11} & \dots & \tilde{C}_{1k_3'} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \tilde{C}_{k_3 1} & \dots & \tilde{C}_{k_3 k_3'} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \tilde{C}_{11} & \dots & \tilde{C}_{1k_4} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \tilde{C}_{k_4 1} & \dots & \tilde{C}_{k_4 k_4'} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_{k_1} \\ b_1 \\ b_{k_2} \\ c_1 \\ c_{k_3} \\ d_1 \\ d_{k_4} \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{C}_{10} \\ \vdots \\ \tilde{C}_{k_1 0} \\ \tilde{C}_{20} \\ \vdots \\ \tilde{C}_{k_2 0} \\ \tilde{C}_{30} \\ \vdots \\ \tilde{C}_{k_3 0} \\ \tilde{C}_{40} \\ \vdots \\ \tilde{C}_{k_4 0} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix} \dots\dots\dots 29$$

$\downarrow$
C

$\downarrow$
W

$\downarrow$
D

Persamaan-persamaan tersebut diatas disebut sistem pemecahan *Ordinary Kriging* yang dapat dinotasikan dalam bentuk matriks di atas.

Kajian Simulasi

Asumsi-asumsi yang digunakan

Dalam simulasi yang penulis lakukan digunakan beberapa asumsi untuk memudahkan dalam perhitungan dan meminimumkan galat (bias) yang dapat mempengaruhi kesimpulan. Asumsi-asumsi yang digunakan adalah :

1. Model variogram yang digunakan adalah model Transisi dan Eksponensial yaitu model yang mencapai *sill* dan tidak tergantung pada arah.
2. Data contoh yang digunakan sesuai dengan model di atas dan memiliki *range a* dan *sill C₁* yang bersesuaian.

Data yang Digunakan dalam Simulasi Berdasarkan Model Variogram

Misalkan data yang digunakan dalam simulasi adalah data ketinggian dari suatu pegunungan di setiap lokasi-lokasi tertentu. Berdasarkan kedua asumsi tersebut, maka data ketinggian tersebut diperoleh berdasarkan suatu model variogram, model variogram yang digunakan adalah model Eksponensial yaitu :

$$\gamma(h) = C_0 + C_1 \left(1 - \exp \left(-\frac{3h}{a} \right) \right) \dots\dots\dots 30$$

dengan :

- h : jarak
- a : *range*
- C_0 : *nugget effect*
- C_1 : *sill*

Sedangkan persamaan umum variogram untuk *h-scatterplots* adalah :

$$\gamma(h) = \frac{1}{2N(h)} \sum_{(i,j)=h_j=h} (v_i - v_j)^2 \dots\dots\dots 31$$

Jika kita ambil nilai variogram untuk satu pasang data, misalkan antara v_1 dan v_2 , dengan nilai v_1 diketahui dan jarak kedua data tersebut adalah h_1 , lalu disubstitusikan ke persamaan (31) sehingga diperoleh :

$$\begin{aligned} \gamma(h_1) &= \frac{1}{2N(h_1)} (v_1 - v_2)^2 \\ \Leftrightarrow (v_1 - v_2)^2 &= 2N(h_1) \gamma(h_1) \\ \Leftrightarrow v_2 &= v_1 \pm \sqrt{2N(h_1) \gamma(h_1)} \dots\dots\dots 32 \end{aligned}$$

Hal ini dapat dilakukan untuk mencari nilai-nilai v yang lainnya secara rekursif selama jarak antara v dan data pertamanya diketahui.

Dalam tulisan ini, simulasi yang dilakukan menggunakan p buah data dimana data-data tersebut diletakkan dalam satu zona dan empat zona yang dituliskan dalam bentuk *grid*/matriks berukuran $m \times n$ dengan lebar *grid* adalah h_1 dan perhitungan dilakukan dalam arah utara-selatan. Data yang diletakkan pada satu zona ditampilkan seperti di bawah ini :

v_{11}	v_{12}	$\cdots$	v_{1n}
v_{21}	v_{22}	$\cdots$	v_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
v_{m1}	$v_{k_1 2}$	$\cdots$	v_{mn}

Satu Zona

Gambar 1 Tampilan Data Dalam Satu Zona

dengan jarak antar data $|v_{ij} - v_{i(j+1)}| = h_1$ dan $|v_{ij} - v_{(i+1)j}| = h_1$ untuk $i = 1, 2, \dots, m$ dan $j = 1, 2, \dots, n$. Sedangkan pada empat zona ditampilkan seperti di bawah ini :

$\begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1k_1} \\ v_{21} & v_{22} & \cdots & v_{2k_1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{k_11} & v_{k_12} & \cdots & v_{k_1k_1} \end{bmatrix}$ Zona 1	$\begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1k_2} \\ v_{21} & v_{22} & \cdots & v_{2k_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{k_21} & v_{k_22} & \cdots & v_{k_2k_2} \end{bmatrix}$ Zona 2
$\begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1k_3} \\ v_{21} & v_{22} & \cdots & v_{2k_3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{k_31} & v_{k_32} & \cdots & v_{k_3k_3} \end{bmatrix}$ Zona 3	$\begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1k_4} \\ v_{21} & v_{22} & \cdots & v_{2k_4} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{k_41} & v_{k_42} & \cdots & v_{k_4k_4} \end{bmatrix}$ Zona 4

Gambar 2. Tampilan Data Dalam Empat Zona

dengan :

Zona1: jarak $|v_{ij} - v_{i(j+1)}| = h_1$ & $|v_{ij} - v_{(i+1)j}| = h_1$ untuk $i = 1, 2, \dots, k_1$ dan $j = 1, 2, \dots, k_1$.

Zona2: jarak $|v_{ij} - v_{i(j+1)}| = h_1$ & $|v_{ij} - v_{(i+1)j}| = h_1$ untuk $i = 1, 2, \dots, k_2$ dan $j = 1, 2, \dots, k_2$.

Zona3: jarak $|v_{ij} - v_{i(j+1)}| = h_1$ & $|v_{ij} - v_{(i+1)j}| = h_1$ untuk $i = 1, 2, \dots, k_3$ dan $j = 1, 2, \dots, k_3$.

Zona4: jarak $|v_{ij} - v_{i(j+1)}| = h_1$ & $|v_{ij} - v_{(i+1)j}| = h_1$ untuk $i = 1, 2, \dots, k_4$ dan $j = 1, 2, \dots, k_4$.

Dengan menentukan nilai awal bagi $v_{11} = v_0$ sebagai pemicu (*trigger*), maka nilai-nilai v yang lainnya dapat diperoleh dari persamaan (31) secara rekursif untuk nilai-nilai h yang bersesuaian. Pada data yang dibangkitkan dalam satu zona, penulis menggunakan 100 (*grid* 10 x 10) data yang memiliki fungsi variogram eksponensial dengan konstanta-konstanta $v_0 = 60$, $C_0 = 0$, $C_1 = 10$, dan $a = 10$. Sedangkan pada data yang dibangkitkan dalam empat zona, penulis menggunakan 25 (*grid* 5 x 5) data untuk masing-masing zona, sehingga tidak merubah banyaknya data yang akan dibangkitkan. Pada zona pertama memiliki fungsi variogram eksponensial dengan konstanta-konstanta $v_0 = 60$, $C_0 = 0$, $C_1 = 11$, dan $a = 11$, zona kedua memiliki konstanta-

konsanta $v_0 = 60$, $C_0 = 0$, $C_1 = 12$, dan $a = 12$, zona ketiga memiliki konstanta-konstanta $v_0 = 60$, $C_0 = 0$, $C_1 = 13$, dan $a = 13$, serta yang terakhir pada zona keempat memiliki konstanta-konstanta $v_0 = 60$, $C_0 = 0$, $C_1 = 14$, dan $a = 14$.

Analisis dan Perbandingan

Misalkan telah ditentukan suatu model eksponensial dengan parameter-parameter seperti pada persamaan (29) yang berkorespondensi pada fungsi kovarian berikut :

$$\tilde{C}(h) = \begin{cases} C_0 + C_1, \text{ untuk } |h| = 0 \\ C_1 \exp\left(\frac{-3|h|}{a}\right), \text{ untuk } |h| > 0 \end{cases} \dots\dots\dots 33$$

Data contoh (*data samples*) yang dibangkitkan baik dalam satu zona maupun pada empat zona memiliki karakteristik tersendiri. Pada satu zona nilai dan lokasi sekelompok data bersifat kontinu sehingga data yang di bangkitkan disatukan secara utuh ke dalam bentuk matriks, dimana data contoh yang dibangkitkan ini dibangun oleh satu fungsi kovarian. Sedangkan pada empat zona nilai dan lokasi sekelompok data bersifat tidak kontinu sehingga lokasi data tersebut kita bagi sekat-sekat yang tidak kontinu tersebut menjadi empat zona, yang masing-masing zona memiliki satu fungsi kovarian yang berbeda sehingga data contoh yang dibangkitkan pada empat zona ini dibangun oleh empat fungsi kovarian yang berbeda.

Misalkan secara rekursif diperoleh p buah data contoh (*data samples*) yang akan digunakan dalam simulasi, dimana p adalah sebanyak $m \times n$:

$$M = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & \dots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & \dots & v_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{m1} & v_{m2} & \dots & v_{mn} \end{bmatrix}$$

maka langkah berikutnya adalah mencari nilai dugaan dari contoh-contoh data di atas dengan menggunakan metode *Ordinary Kriging* sehingga diperoleh matriks data dugaan seperti dalam matriks berikut :

$$\hat{M} = \begin{bmatrix} \hat{v}_{11} & \hat{v}_{12} & \dots & \hat{v}_{1n} \\ \hat{v}_{21} & \hat{v}_{22} & \dots & \hat{v}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{v}_{m1} & \hat{v}_{m2} & \dots & \hat{v}_{mn} \end{bmatrix}$$

Dalam menentukan nilai $\hat{v}_{ij}$ untuk setiap $i = 1, 2, \dots, m$ dan $j = 1, 2, \dots, n$ digunakan sebuah teknik yang disebut teknik penghapusan satu-satu (metode *jackknife*).

Algoritma *Jackknife* :

1. Keluarkan v_{11} dari M dan dengan menggunakan sebanyak $n - 1$ data dan menjadikan lokasi dari v_{11} sebagai lokasi data yang akan ditentukan nilai

dugaannya (x_0, y_0) melalui sistem *Ordinary Kriging*.

2. Hitung jarak dari setiap data terhadap v_{11} dan jarak antar data dalam M untuk mendapatkan matriks jarak antar lokasi data.

	v_{11}	$\dots$	v_{1n}	$\dots$	v_{m1}	$\dots$	v_{mn}
v_{11}	0						
$\vdots$							
v_{1n}			0				
$\vdots$							
v_{m1}					0		
$\vdots$							
v_{mn}	$h(p-1)0$						0

3. Matriks kovarian untuk jarak antar lokasi di atas adalah :

$$C = \begin{bmatrix} \tilde{C}_{11} & \tilde{C}_{12} & \dots & \tilde{C}_{1(p-1)} & 1 \\ \tilde{C}_{21} & \tilde{C}_{22} & \dots & \tilde{C}_{2(p-1)} & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \tilde{C}_{(p-1)1} & \tilde{C}_{(p-1)2} & \dots & \tilde{C}_{(p-1)(p-1)} & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

4. Vektor D bagi sistem kriging di atas adalah :

$$D = \begin{bmatrix} \tilde{C}_{10} \\ \tilde{C}_{20} \\ \vdots \\ \tilde{C}_{(p-1)0} \\ \lambda \end{bmatrix}$$

5. Dengan demikian vektor pembobot dapat diperoleh dengan :

$$W = C^{-1} \cdot D$$

dengan :

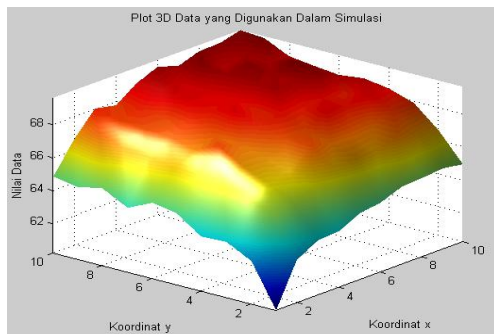
$$W = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_{(p-1)} \\ 1 \end{bmatrix}$$

6. Akhirnya diperoleh :

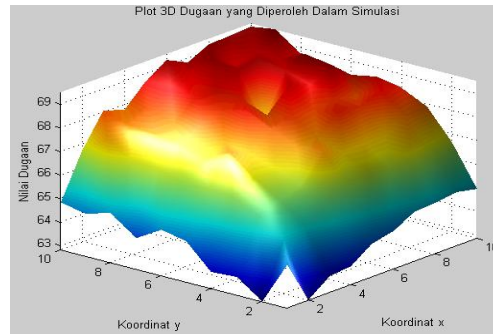
$$\hat{v}_{11} = \sum_{i=1}^{p-1} w_i v_i$$

7. Setelah dugaan dari v_{11} diperoleh, masukkan kembali data tersebut ke dalam M , dan dengan cara yang sama keluarkan data v_{12} dan seterusnya secara rekursif untuk mendapatkan nilai dugaan dari data-data contoh yang telah dibangkitkan.

Gambar 3.1 menampilkan plot tiga dimensi data pada satu zone, sedangkan Gambar 3.2 menampilkan plot tiga dimensi data dugaan pada satu zona. Gambar 4 menampilkan plot tiga dimensi data yang diperoleh pada empat zona, sedangkan plot tiga dimensi nilai dugaan yang diperoleh pada empat zona ditampilkan pada Gambar 5.

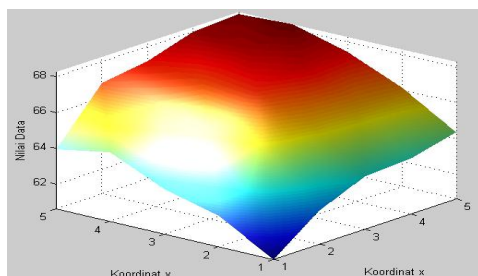


Gambar 3.1 Plot 3D Nilai Data

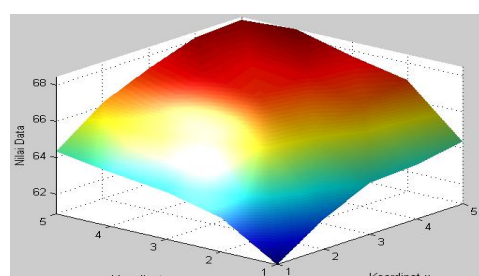


Gambar 3.2 Plot 3D Nilai Dugaan

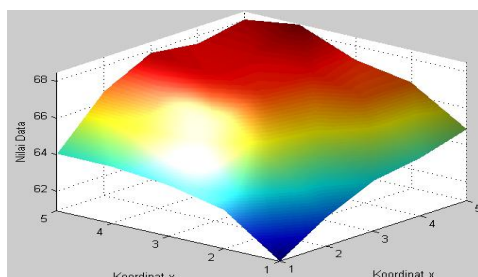
Gambar 3. Plot 3D Data Dan Nilai Dugaan Pada Satu Zone



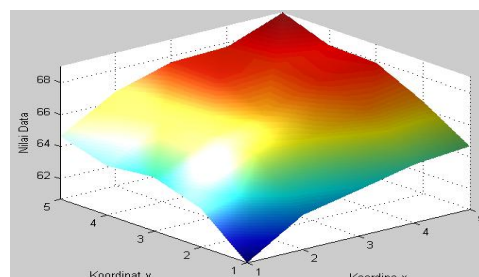
Plot 3D Data Pada Zona Pertama



Plot 3D Data Pada Zona Kedua

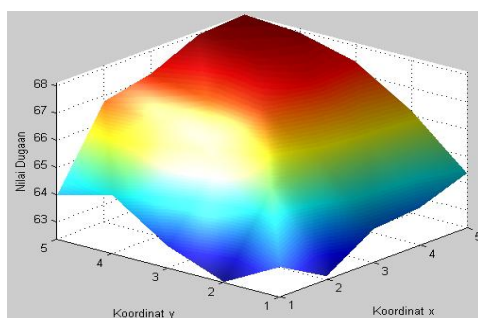


Plot 3D Data Pada Zona Ketiga

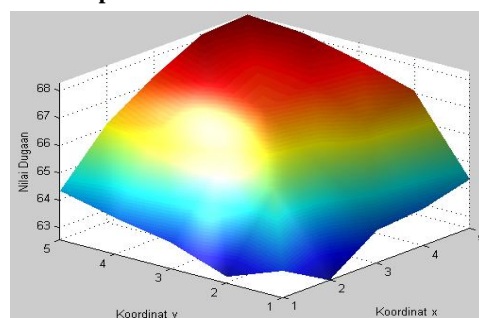


Plot 3D Data Pada Zona Keempat

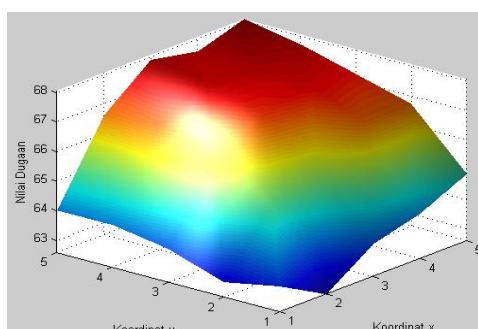
Gambar 4 Plot 3D Data Pada Empat Zona



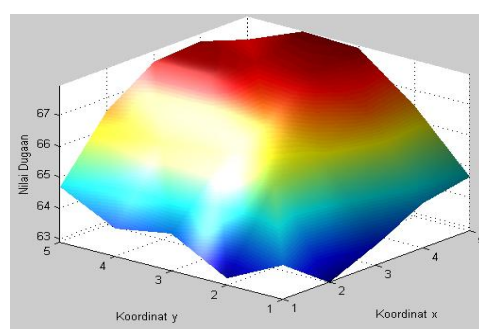
Plot 3D Dugaan Pada Zona Pertama



Plot 3D Dugaan Pada Zona Kedua



Plot 3D Dugaan Pada Zona Ketiga



Plot 3D Dugaan Pada Zona Keempat

Gambar 5 Plot 3D Nilai Dugaan Pada Empat Zona

Tingkat akurasi dari nilai dugaan terhadap nilai data yang digunakan dalam simulasi yang dilakukan penulis bergantung pada nilai *galat* (bias) yang diperoleh dari selisih dari nilai data dengan dugaannya. Nilai-nilai *galat* (bias) pada lokasi tertentu disajikan pada daftar data dan pendugaan yang diperoleh dalam simulasi. Dari hasil yang diperoleh dapat ditarik kesimpulan bahwa nilai-nilai dugaan yang dihasilkan dari proses simulasi pada empat zona mendekati nilai-nilai data yang sebenarnya dibandingkan pada satu zona, atau data contoh yang dibangun oleh lebih dari satu fungsi kovarian (dalam hal ini ada empat fungsi kovarian yang berbeda), nilai dugaannya mendekati dengan nilai data yang sebenarnya dibandingkan dengan data contoh yang dibangun oleh satu fungsi kovarian saja. Hal ini mengakibatkan bahwa nilai *galat* (bias) yang diperoleh pada data yang dibangkitkan dalam empat zona lebih kecil daripada nilai *galat* (bias) yang diperoleh pada data yang dibangkitkan dalam satu zona yang artinya nilai-nilai dugaan data pada empat zona lebih akurat (dapat diterima) daripada nilai-nilai dugaan data pada satu zona.

Pengambilan Keputusan Terhadap Hasil Simulasi

Jika kita urutkan p data dalam V menjadi $v_1, v_2, \dots, v_p$ dengan menggunakan teknik *Jackknife* diperoleh nilai dugaan $\hat{v}_1, \hat{v}_2, \dots, \hat{v}_p$ dan nilai galat (*bias*) $e_1, e_2, \dots, e_p$ dimana $e_i = |\hat{v}_i - v_i|$ dengan $i=1, 2, \dots, p$. Kemudian dengan menempatkan v_i pada suatu plot dua dimensi terhadap nilai dugaannya $\hat{v}_i$, kita dapat menggunakan inferensia mengenai koefisien garis regresi linear yang terdapat pada pembahasan sebelumnya. Landasan berpikir bagi penggunaan metode tersebut adalah bahwa jika nilai-nilai dugaan untuk setiap v memiliki nilai yang cukup mendekati dari nilai sebenarnya, maka plot antara v dengan dugaannya $\hat{v}$ akan berkumpul di sekitar garis linear $\hat{v} = v$.

Jika kita membuat suatu model garis regresi bagi v dan dugaannya $\hat{v} = av + b$, maka dapat dilakukan uji hipotesis terhadap a dan b . Misalkan hipotesis-hipotesis yang akan diuji kebenarannya adalah :

$$H_0 : a = 1 \text{ dan } b = 0$$

$$H_1 : a \neq 1 \text{ atau } b \neq 0$$

dalam taraf nyata α tertentu.

Jika tidak ada cukup alasan untuk menolak H_0 maka hasil dugaan melalui metode *Ordinary Kriging* dalam simulasi yang dilakukan diterima, dan dugaan tersebut ditolak jika H_1 diterima.

Dalam simulasi yang telah dilakukan penulis, baik data contoh yang dibangkitkan dalam satu zona maupun empat zona mempunyai lebar *grid* satu satuan, sehingga untuk posisi yang jauh dari titik awal pada data yang dibangkitkan dalam satu zona (dalam hal ini koordinat (10,9) dan (9,10)) begitu juga pada data contoh yang dibangkitkan dalam empat zona (koordinat (5,4) dan (4,5) pada masing-masing zona) dimana data hampir mencapai *sill*,

muncul data pencilan yang disebabkan oleh keterbatasan penyimpanan bilangan desimal atau pembulatan. Data pencilan ini akan mempengaruhi hasil pengambilan keputusan.

Dengan menghilangkan data pencilan tersebut, maka pada data contoh yang dibangkitkan dalam satu zona data yang digunakan hanya 98 data, sedangkan dalam empat zona, masing-masing zona menggunakan 23 data. Kemudian data-data tadi disubstitusikan ke dalam persamaan normal sehingga diperoleh Sistem Persamaan Linear (SPL) dua persamaan dengan dua peubah. Pada data yang ditampilkan dalam satu zona, persamaan normalnya adalah :

$$\begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{98} v_k^2 \end{bmatrix} a + \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{98} v_k \end{bmatrix} b = \sum_{k=1}^{98} v_k \hat{v}_k$$

$$\begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{98} v_k \end{bmatrix} a + 98b = \sum_{k=1}^{98} \hat{v}_k$$

Dengan menyelesaikan SPL di atas diperoleh nilai $a = 0.9104$, $b = 6.0807$ sehingga didapatkan persamaan garis regresinya yaitu :

$$\hat{v} = 0.9104v + 6.0807$$

Sedangkan pada data yang ditampilkan dalam empat zona, persamaan normalnya adalah :

$$\begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{23} v_k^2 \end{bmatrix} a + \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{23} v_k \end{bmatrix} b = \sum_{k=1}^{23} v_k \hat{v}_k$$

$$\begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{23} v_k \end{bmatrix} a + 23b = \sum_{k=1}^{23} \hat{v}_k$$

Dengan menyelesaikan SPL di atas, maka pada zona pertama diperoleh nilai $a = 0.8510$ dan $b = 9.856$ sehingga persamaan garis regresinya ialah :

$$\hat{v} = 0.8510v + 9.856$$

Pada zona kedua diperoleh nilai $a = 0.8633$ dan $b = 9.0652$, sehingga persamaan garis regresinya ialah :

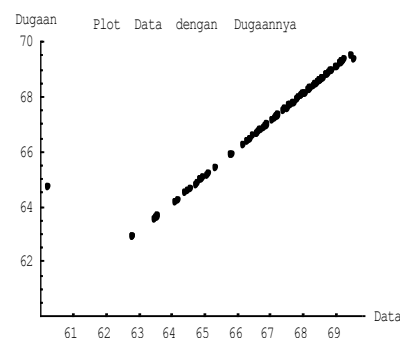
$$\hat{v} = 0.8633v + 9.0652$$

Pada zona ketiga diperoleh nilai $a = 0.8629$ dan $b = 9.0969$ sehingga persamaan garis regresi ialah :

$$\hat{v} = 0.8629v + 9.0969$$

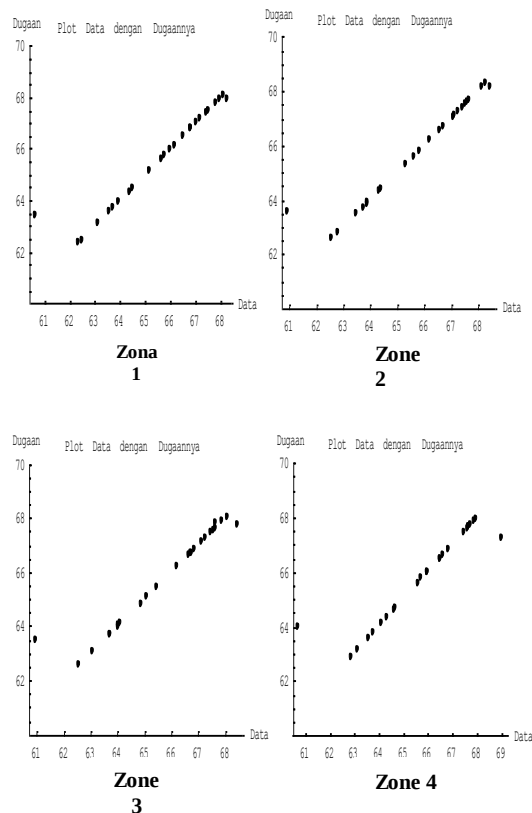
Dan yang terakhir pada zona keempat diperoleh nilai $a = 0.7447$ dan $b = 16.8152$, sehingga persamaan garis regresinya ialah :

$$\hat{v} = 0.7447v + 16.8152$$



Gambar 6 Plot Data Dengan Dugaan Pada Satu Zona

Plot dua dimensi antara $\hat{v}$ dengan v pada data yang dibangkitkan dalam satu zona ditampilkan pada Gambar 6, sedangkan plot dua dimensi antara $\hat{v}$ dengan v pada data yang dibangkitkan dalam empat zona atau empat bagian ditampilkan pada Gambar 7.



**Gambar 7. Plot 2D Data
Dengan Dugaan Pada**

Karena plot antara $\hat{v}$ dengan v sudah ditampilkan dari setiap simulasi yang dilakukan, maka kita dapat menggambar grafik dari persamaan garis regresi dengan cara menarik garis lurus di sekitar titik-titik plot tersebut.

Langkah selanjutnya adalah menentukan apakah hasil simulasi yang kita gunakan dapat diterima atau tidak, dengan kata lain apakah dugaan yang dihasilkan memiliki nilai-nilai yang cukup dekat dengan data yang sebenarnya, dilakukan dengan mengamati model linear yang terdapat pada gambar tersebut. Lalu dilakukan uji hipotesis terhadap nilai-nilai koefisien model linear yaitu a dan b yang dihasilkan dengan menggunakan $n-2=98-2=96$ derajat bebas pada data yang dibangkitkan dalam satu zona, sedangkan untuk data yang dibangkitkan dalam empat zona, masing-masing zona menggunakan $n-2=23-2=21$ derajat bebas. Dengan menggunakan taraf nyata 0.05 maka nilai t -tabel $t_{\rho/2}$ dari sebaran- t dengan 96 derajat bebas adalah 2.576, sehingga selang kepercayaannya adalah :

$$-2.576 < t < 2.576$$

sedangkan untuk 21 derajat bebas, nilai t -tabel $t_{\rho/2}$ dari sebaran- t adalah 2.831 sehingga selang kepercayaannya adalah :

$$-2.831 < t < 2.831$$

Kemudian data v dan $\hat{v}$ hasil simulasi yang bersesuaian dengan data yang dibangkitkan disubstitusikan ke persamaan. Pada data yang dibangkitkan dalam satu zona diperoleh nilai $S_v^2 = 2.6015$, $S_{\hat{v}}^2 = 2.6275$ dan $S_e^2 = 0.4762$. Sedangkan untuk data yang dibangkitkan dalam empat zona diperoleh nilai $S_v^2 = 4.0713$, $S_{\hat{v}}^2 = 3.2015$ dan $S_e^2 = 0.2652$ pada zona kesatu. Pada zona kedua diperoleh nilai $S_v^2 = 4.0041$, $S_{\hat{v}}^2 = 3.2048$ dan $S_e^2 = 0.2311$. Pada zona ketiga diperoleh nilai $S_v^2 = 3.9018$, $S_{\hat{v}}^2 = 3.1047$ dan $S_e^2 = 0.3015$. Serta yang terakhir pada zona keempat diperoleh nilai $S_v^2 = 4.0028$, $S_{\hat{v}}^2 = 2.5989$ dan $S_e^2 = 1.5565$.

Setelah diperoleh nilai S_v , $S_{\hat{v}}$, dan S_e maka kita dapat mengetahui nilai t -hitung pada setiap data yang dibangkitkan baik pada satu zona maupun empat zona. Pada data yang dibangkitkan dalam satu zona diperoleh nilai $t_a = -2.0625$ dan $t_b = 2.0857$, sedangkan pada data yang dibangkitkan dalam empat zona untuk masing-masing zona diperoleh nilai $t_a = -2.7381$ dan $t_b = 2.7711$ pada zona kesatu, $t_a = -2.6690$ dan $t_b = 2.7018$ pada zona kedua, $t_a = -1.2702$ dan $t_b = 2.3267$ pada zona ketiga, sedangkan pada zona keempat mempunyai nilai $t_a = -2.4033$ dan $t_b = 1.9271$. Karena nilai t_a dan t_b yang dihasilkan dari tiap-tiap zona berada dalam selang kepercayaan untuk taraf nyata 0.005, maka kita tidak memiliki cukup alasan untuk menolak H_0 , yaitu $a = 0$ dan $b = 1$. Dengan demikian persamaan linear hasil simulasi dari tiap-tiap data yang dibangkitkan baik dalam satu zona maupun empat zona dapat disimpulkan cukup mendekati bentuk :

$$\hat{v} = v$$

Dari bentuk akhir tersebut diperoleh kesimpulan bahwa nilai-nilai dugaan yang dihasilkan melalui proses simulasi dengan menggunakan metode *Ordinary Kriging* yang telah penulis lakukan, baik data yang dibangkitkan dalam satu zona maupun empat zona mendekati nilai-nilai data yang sebenarnya. Akan tetapi nilai dugaan yang dihasilkan pada data yang dibangkitkan dalam empat zona lebih akurat dibandingkan dengan nilai dugaan yang dihasilkan pada data yang dibangkitkan dalam satu zona. Hal ini dapat disebabkan, karena nilai *galat* (bias) pada data yang dibangkitkan dalam empat zona lebih kecil daripada nilai *galat* (bias) pada data yang dibangkitkan dalam satu zona.

KESIMPULAN DAN SARAN

Kesimpulan

- Semakin banyak partisi dilakukan pada area ruang contoh spasial maka akan banyak partisi pada matriks kovarian. Hal ini memberikan kemungkinan makin banyak kendala dalam sistem *ordinary kriging*.

- Terbukti bahwa *system ordinary kriging* dengan matriks kovarian yang terpartisi empat akan menghasilkan penduga yang minimum varian dan tak bias. Untuk mencapai penduga yang tak bias pada empat partisi diperlukan total pembobot masing-masing partisi sama dengan seperempat.
- *Jackknife* merupakan metode yang dikombinasikan dengan Sistem Persamaan Linear dan Penarikan Keputusan melalui Uji Hipotesis Statistika dapat digunakan sebagai teknik dalam mengukur tingkat akurasi dari dugaan yang dihasilkan oleh Metode Ordinary Kriging.
- Hasil simulasi menyimpulkan bahwa untuk data-data yang memiliki nilai variogram yang bersesuaian dengan model yang diambil dan memenuhi asumsi-asumsi yang telah ditentukan sebelumnya, ternyata data yang dibangkitkan dalam empat zona (yang memiliki empat fungsi kovarian yang berbeda) nilai-nilai dugaannya cukup dekat dengan nilai data yang sebenarnya dibandingkan dengan data yang dibangkitkan dalam satu zona (yang memiliki satu fungsi kovarian). Hal ini mengakibatkan nilai *galat* (bias) yang diperoleh pada data yang dibangkitkan dalam empat zona lebih kecil daripada nilai *galat* (bias) yang diperoleh pada data yang dibangkitkan dalam satu zona.

Saran

- Perlu dilakukan penelitian lanjutan dengan mengembangkan teknik matriks kovarian yang sekuensial untuk mengatasi masalah kondisi anisotropik.

DAFTAR PUSTAKA

- Ari Wicaksono dan Nur Aidi. 2000. Perbandingan antara Ordinary Kriging dan Cokriging untuk Pendugaan Data Spasial. (Comparison Data Spatial Estimation by Using Ordinary Kriging and Cokriging). Skripsi.
- Cressie, N. A. C. 1991. *Statistics for Spatial Data*. Wiley, New York.
- Davin J. Unwin. 1997. *An Introduction to trend surface analysis*. Catmog.
- Graeme Aplin. 1997. *Order-neighbour analysis*. Catmog.
- Hans Wackernagel. 1995. *Multivariate Geostatistics. An Introduction with Applications*. Springer.
- Helms, L. L. 1997. *Introduction to Probability Theory with Contemporary Applications*. W. H. Freeman and Company, New York
- Isaaks, E.H. & R. M. Srivastava. 1989. *Applied Geostatistics*. Oxford Unive. Press. New York.
- Hardiansyah, J. dan Nur Aidi. 2001. Strategi Perhitungan Akurasi Metode Ordinary Kriging dengan Menggunakan Teknik Jackknife. Skripsi.
- J. A. Vargas-Guzman, and T.-C. Jim Yeh. 1999. *Sequential kriging and cokriging: Two powerful geostatistical approaches*. In. *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment* 13 (1999) 416-435.
- K.G. v.d. Boogaart. (Mathematics and Computer Sciences in Geology, Freiberg University of Mining and Technology, BvCotta-Str 2, D-09596 Freiberg, Germany). _____. How to estimate the precision of the *variogram*. TU Bergakademie Freiberg, Germany.
- K.G. v.d. Boogaart. (Mathematics and Computer Sciences in Geology, Freiberg University of Mining and Technology, BvCotta-Str 2, D-09596 Freiberg, Germany). _____. *Odd and ends of variogram modeling*. TU Bergakademie Freiberg, Germany.
- K.G. v.d. Boogaart. (Mathematics and Computer Sciences in Geology, Freiberg University of Mining and Technology, BvCotta-Str 2, D-09596 Freiberg, Germany). _____. *Analysis of variance for direction and axes*. TU Bergakademie Freiberg, Germany.
- Leon, S. J. 2001. *Aljabar Linear dan Aplikasinya* Ed 5. Erlangga, Jakarta.
- Mathew, JH. 1992. *Numerical Methods for Mathematics, Science and Engineering*. Second Ed. New Jersey: Princeton.
- Nunung Nursaid dan Nur Aidi. 2002. Pendugaan dengan Dua Kondisi Ketakbiasan pada Teknik *CoKriging*. Skripsi.
- Neil Wrigley, 1997. *Introduction to the Use logit models in geography*. Catmog.
- Olea, R.A. 1975. *Optimum Mapping Techniques using Regionalized Variable Theory*. Empressa National Del Petroleo, Santiago, Chile
- Pressini, A. L. Sullivan, F.E., & Uhl, J.J. 1988. *The Mathematics of Nonlinear Programming*. Springer-Verlag New York Inc, New York.
- Richardo A. Olea. 1975. *Optimum Mapping Techniques Using Regionalized Variable Theory*. Chile.
- Walpole, RE. 1992. *Pengantar Statistika*. Ed ke 3. Terjemahan Bambang Sumatri. Gramedia, Jakarta.

