Forum Statistika dan Komputasi, April 2008, p: 23-33 Vol 13 No.1
ISSN : 0853-8115

PENGGUNAAN RANTAI *MARKOV* UNTUK ANALISIS SPASIAL SERTA MODIFIKASINYA DARI SISTEM TERTUTUP KE SISTEM TERBUKA

Muhammad Nur Aidi

Departemen Statistika, FMIPA IPB

Abstrak

Model rantai Markov merupakan suatu konsep yang menarik untuk menggambarkan dan menganalisa kealamian suatu perubahan diakibatkkan oleh pergerakan state-state di atas, terkadang model Markov juga dipergunakan untuk meramalkan perubahan pada masa depan

Kata Kunci : Model Markov, Ekuilibrium, Matriks Fundamental

PENDAHULUAN

Model rantai *Markov* sangatlah berguna bagi ahli geografi khususnya yang berurusan dengan masalah pergerakan. Yang dimaksud pergerakan di sini adalah pergerakan dari satu tempat ke tempat yang lain dan pergerakan dari satu *state* ke *state* lain. Dalam hal ini *state* mengacu pada kelas/kelompok mengenai ukuran besarnya suatu kota, kelas pendapatan, jenis produk-produk pertanian, penggunaan tanah, dan lain-lain. Model rantai *Markov* merupakan suatu konsep yang menarik untuk menggambarkan dan menganalisa kealamian suatu perubahan diakibatkkan oleh pergerakan *state-state* di atas, terkadang model *Markov* juga dipergunakan untuk meramalkan perubahan pada masa depan. Dengan demikian, model rantsi *Markov* berguna baik dalam studi tentang migrasi, yang tujuannya mungkin untuk mengetahui arah dominan atau tingkat perubahan suatu migrasi, maupun dalam studi pertumbuhan atau perkembangan katakanlah suatu sistem perkotaan, yang tujuannya mungkin untuk menentukan kota yang bagaimana yang cenderung meluas dan kota yang bagaimana yang cenderung mengecil. Umumnya model Markov lebih diasumsikan pada sistem tertutup, namun pada akhir tulisan diberikan modifikasi sehingga dapat dipraktekan dalam system terbuka.

Model Markov Sederhana

Segala informasi yang didapatkan dari pengamatan terhadap kecenderungan suatu peluang di masa lampau, misalnya lebih dari sepuluh tahun terakhir, dapat dibuat menjadi sebuah matriks yang merupakan kerangka dasar sebuah model *Markov*. Kita asumsikan pada suatu wilayah peluang perpindahan antara urban, suburban, dan rural digambarkan oleh matriks di bawah ini. (Tabel 1)

Tabel 1 Peluang Perpindahan dari

	Urban	Suburban	Rural
Urban		0.3	0.1
Suburban		0.2	0.5
Rural		0.4	0.1

Ketiga lokasi dalam matriks ini membentuk *state* dari model *Markov*, dan masing-masing unsur menyatakan nilai peluang suatu pergerakan dari satu *state* ke *state* lain. Dalam konteks ini peluang itu kita sebut peluang transisi dimana pada contoh di atas peluangnya hanya diasumsikan. Kita asumsikan dari semua penduduk yang tinggal di urban sebanyak 60% atau 0.6 masih menetap di urban, 30% (0.3) pindah dari urban ke sub urban, dan 10% pindah dari urban ke rural pada tahun 1960. Dengan demikian, penjumlahan unsur-unsur pada setiap baris matriks di atas menghasilkan 100% atau 1.0, tetapi tidak demikian pada kolom-kolomnya. Sepanjang periode yang sama, dari semua penduduk yang tinggal di sub urban sebanyak 0.2 pindah ke urban pada tahun selanjutnya, dan sebanyak 0.1 dari mereka yang tinggal di rural pada tahun pertama pindah ke sub urban. Matriks yang berisi peluang transisi atau disebut juga matriks transisi ini menggambarkan peluang pergerakan dari satu *state* ke *state* lain pada selang waktu tertentu atau *diskret* (pada contoh ini 1 tahun). Lebih lanjut lagi Mari kita berasumsi bahwa antara tahun pertama dan tahun kedua tidak ada perubahan jumlah populasi pada ketiga *state*. Kita hanya akan memperhatikan penyebaran ulang penduduk yang populasinya konstan. Asumsikan bahwa pada tahun pertama total populasi pada ketiga *state* 10 juta, 50% berada di urban, 30% di sub urban, dan 20% di rural. Keadaan *state* awal sistem ini dapat dinyatakan dalam bentuk vektor peluang:

$$p^{(0)} = (p_1^{(0)}\ p_2^{(0)}\ p_3^{(0)}) = (0.5\ \ 0.3\ \ 0.2)$$

Vektor *state* awal $p^{(0)}$ mengacu pada *state* sistem tahun pertama, $p^{(1)}$ pada *state* system tahun kedua, $p^{(2)}$ pada tahun ketiga, dan seterusnya. Dengan cara yang sama, untuk kemudahan penggunaan simbol kita tuliskan matriks transisi lengkap sebagai P. Dengan menggunakan aljabar matriks dapat kita hitung $p^{(1)}$ sebagai perkalian antara vektor *state* awal $p^{(0)}$ dengan P sedemikian sehingga

$$p^{(0)}\,P = p^{(1)} \qquad (1)$$

Pada contoh di atas:

$$(0.5\ ,\ 0.3\ ,\ 0.2)\ \text{x} \begin{bmatrix} 0.6 & 0.3 & 0.1 \\ 0.2 & 0.5 & 0.1 \\ 0.4 & 0.1 & 0.5 \end{bmatrix}$$

0.5x0.6=0.30 0.5x0.3=0.15 0.5x0.1= 0.05
0.3x0.2=0.06 0.3x0.5=0.15 0.3x0.3 = 0.09
0.2x0.4=0.08 0.2x0.1=0.02 0.2x0.5 = 0.10
0.44 0.32 0.24

Sehingga $p^{(1)} = (0.44\ \ 0.32\ \ 0.24)$

Dengan demikian, pada tahun kedua, 10 juta orang di ketiga *state* tersebut tersebar sebanyak 44% di Urban (50 persen di tahun pertama), 32% di sub urban, dan 24% di rural. Jika kita asumsikan bahwa peluang transisi pada periode tahun pertama ke tahun kedua akan tetap sama pada periode pertama ke kedua dan total populasinya juga sama, maka kita dapat menentukan sebaran populasi pada tahun ketiga ($p^{(2)}$) dengan mengalikan *state* sistem yang baru pada tahun tahun kedua ($p^{(1)}$) dengan P. Maka

$$p^{(2)} = p^{(1)}\,P$$

$$(0.44{,}0.32{,}0.24)\text{x}\begin{bmatrix} 0.6 & 0.3 & 0.1 \\ 0.2 & 0.5 & 0.1 \\ 0.4 & 0.1 & 0.5 \end{bmatrix}=(0.424{,}0.316{,}0.26)$$

Pada tahun ketiga, populasi di Urban akan tetap menurun hingga 42.4%, sedangkan proporsi di rural meningkat hingga 26%. Perlu dicatat bahwa antara tahun pertama ke keuda proporsi di sub urban meningkat dari 30 % menjadi 32% tetapi pada tahun berikutnya merosot ke 31.6%.

Dengan menerapkan prosedur perkalian vektor-matriks yang sama, kita dapat menentukan sebaran populasi yang diharapkan bagi ketiga *state* system pada tahun keempat, tahun kelima dan seterusnya. Secara umum

$$p^{(n)} = p^{(n-1)}\,P \qquad (2)$$

Ada cara alternatif menghitung setiap vektor di atas. Daripada harus menghitung suatu vektor berdasarkan vektor sebelumnya secara rekursi, kita dapat memangkatkan matriks transisi dan mengalikannya dengan vektor *state* awal. Hasilnya akan sama.

$$p^{(1)} = p^{(0)}\,P^1 \qquad (3)$$
$$p^{(2)} = p^{(0)}\,P^2$$
$$p^{(3)} = p^{(0)}\,P^3$$
$$\vdots$$
$$p^{(n)} = p^{(0)}\,P^n$$

Untuk menghitung P^2, kita gunakan cara perkalian vektor-matriks yang sama. Setiap baris dari matriks pertama kita anggap sebagai vektor dan dikalikan dengan setiap kolom dari matriks kedua. Nilai dari tiap perkalian baris-kolom dijumlahkan untuk mendapatkan unsure-unsur matriks yang baru, yaitu P^2. (3.1)

$$P^2 = \begin{matrix} 0.6 & 0.3 & 0.1 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ 0.4 & 0.1 & 0.5 \end{matrix}\ \text{x}\ \begin{matrix} 0.6 & 0.3 & 0.1 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ 0.4 & 0.1 & 0.5 \end{matrix}$$

Baris pertama dari matriks pertama
0.6x0.6=0.36 0.6x0.3=0.18 0.6x0.1 = 0.06
0.3x0.2=0.06 0.3x0.5= 0.15 0.3x0.3 = 0.09
0.1x0.4=0.04 0.1x0.1 = 0.01 0.1x0.5 = 0.05
0.46 0.34 0.20

Baris kedua
0.2x0.6 =0.12 0.2x0.3=0.06 0.2x0.1= 0.02
0.5x0.2 =0.10 0.5x0.5= 0.25 0.5x0.3 = 0.15
0.3x0.4 =0.12 0.3x0.1= 0.03 0.3 x0.5 = 0.15
0.34 0.34 0.32

Baris ketiga
0.4 x 0.6 = 0.24 0.4 x 0.3 = 0.12 0.4 x 0.1 = 0.04
0.1 x 0.2 = 0.02 0.1 x 0.5 = 0.05 0.1 x 0.3 = 0.03
0.5 x 0.4 = 0.20 0.5 x 0.1 = 0.05 0.5 x 0.5 = 0.25
0.46 0.22 0.32

$$\text{Maka } P^2 = \begin{matrix} 0.46 & 0.34 & 0.20 \\ 0.34 & 0.34 & 0.32 \\ 0.46 & 0.22 & 0.32 \end{matrix}$$

dan $P^3 = P \text{ x } P^2$
$P^4 = P \text{ x } P^3$ atau $P^2 \text{ x } P^2$

Walaupun cara kedua ini nampaknya lebih rumit, cara lebih umum digunakan dalam program komputer geografik (lihat Marble, 1967). Alasan utama lebih banyaknya digunakan cara ini adalah ukuran deskriptif selanjutnya (lihat bagian selanjutnya) dapat diturunkan dari pemangkatan matriks transisi, sedangkan cara pertama hanya menghasilkan *state* system di akhir setiap selanh waktu. Pada intinya, inilah prinsip dasar analisis rantai *Markov*. Contoh sederhana ini telah menunjukkan bagaimana informasi yang berkenaan dengan peluang baru dapat dibuat dalam suatu format yang ringkas dalam model *Markov* untuk tujuan yang bersifat deskripsi, analisis maupun prediksi. Harus ditekankan bahwa dalam contoh di atas kita asumsikan populasi konstan, kita asumsikan suatu himpunan peluang transisi, kita asumsikan juga peluang-peluang ini tetap konstan atau stasioner, dan kita asumsikan informasi dunia nyata dapat didekati dengan model *Markov*. Tujuan bahasan berikutnya adalah suatu empat serangkai: untuk menggambarkan dengan lebih tepat konsep analisis rantai *Markov* sedemikian sehingga dapat memungkinkan kita menentukan sesuatu yang memperluas penilaian seseorang dalam menggunakan teknik analisis geografis, untuk menguraikan keunggulan-keunggulan deskriptif model *Markov*, untuk membahas implikasi dari asumsi-asumsi yang mendasarinya, dan terakhir untuk menguraikan secara singkat penerapan model *Markov* secara khusus dalam masalah-masalah geografis.

SIFAT RANTAI *MARKOV* TERBATAS REGULER

Peluang Transisi

Peluang transisi p_{ij} yang berupa peluang/perpindahan suatu proses dari *state* S_i ke *state* S_j diberikan untuk setiap pasang *state*. "Himpunan" peluang atau "fungsi hasil" menggambarkan proses perpindahan tersebut yang melalui beberapa tahap. Agar lebih mudah dalam perhitungan dan perlambangan, secara sederhana peluang transisi ini dapat dituliskan dalam bentuk matriks transisi **P**.

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \\ S_1 \\ S_2 \\ : \\ : \\ S_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} S_1 & S_2 & S_3 & ..... & S_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & ...... & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & ..... & p_{2n} \\ : & : & : & ...... & : \\ : & : & & ...... & : \\ p_{n1} & p_{n2} & p_{n3} & ..... & p_{nn} \end{pmatrix} \end{array} \qquad (3.4)$$

Dimana $\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1$

dan $p_{ij} \geq 0$ untuk semua i dan j

Pada setiap **P** melambangkan peluang perpindahan dari *state* S_i dan S_j pada langkah berikutnya. Karena unsur dari matriks ini harus tak negatif dan jumlah unsur-unsur pada setiap baris adalah 1, maka setiap baris disebut vektor peluang dan matriks **P** disbeut matriks stokastik. Jika setiap pemangkatan matriks **P** hanya mengandung unsur-unsur positif, maka matrisk transisi dikatakan sebagai matriks reguler/biasa.

Teorema *Markov*

Untuk rantai *Markov* Reguler dua teorema penting yang berhubungan dengan sifat equilibrium (keseimbangan) diberikan oleh Kemeny dan Snell (1967, hal 69-98).

Teorema 1 : Jika **P** adalah matriks transisis untuk Rantai Harkov reguler, maka :

1. pangkat dari **P** mendekatai sebuah matriks **A**
2. setiap baris dari **A** merupakan vektor peluang α yang sama
3. unsur-unsur dari α semua positif

Teorema 2 : Jika **P** adalah matriks transisi untuk Rantai *Markov* reguler dan **A**, α seperti yang didefinisikan dalam Teorema 1, maka ada vektor α yang tunggal sehingga α **P** = α.

Matriks **A** didefiniskan sebagai matriks batas. Teorema ini akan lebih jelas lagi setelah diberikan suatu contoh hipotesis khusus. Andaikan sebuah contoh konstan, dari kapal dagang yang menyebar di tiga samudera : Atlantik, Pasifik, dan Hindia. Asumsikan pada saat t_0, 20 % dari jumlah total kapal berada di Hindia, 20 % di Pasifik, dan 60 % di Atlantik. Dengan demikian *state* awal dari sistem ini dapat ditunjukkan oleh vektor sebaran awal, $\mathbf{p}^{(0)}$, berikut :

$\mathbf{p}^{(0)}$ = (20, 20, 60) = (.2, .2, .6)

Asumsikan juga bahwa peluang pergerakan kapal karena aktifitas perdagangannya dari satu *state* (samudera) ke *state* lain selama periode waktu tertentu (selang waktu satu tahun) ditunjukkan dengan matriks berikut :

$$\begin{array}{cc} \\ \\ S_1 & \textit{Hindia} \\ S_2 & \textit{Pasifik} \\ S_3 & \textit{Atlantik} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} S_1 & S_2 & S_3 \\ \textit{Hindia} & \textit{Pasifik} & \textit{Atlantik} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.6 & 0.2 & 0.2 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 0.2 & 0.2 & 0.6 \end{pmatrix} \end{array}$$

Matriks Batas

Matrik **P** menunjukkan peluang dari kapal yang tetap berada di Samudera Hindia (tidak berpindah) selama selang waktu tertentu yang diberikan adalah 0.6, sedangkan peluang pergerakan kapal dari Hindia ke Pasifik adalah 0.2 dan seterusnya. Dengan matriks transisi awal ini kita dapat menghitung peluang transisi setelah 1, 2, 3, ... n tahap dengan pemangkatan matriks yang sesuai.

Setelah dua tahap didapatkan matriks

$$\mathbf{P2} = \begin{array}{c|ccc} & S_1 & S_2 & S_3 \\ S_1 & .46 & .24 & .30 \\ S_2 & .36 & .28 & .36 \\ S_3 & .30 & .24 & .46 \end{array}$$

Dan setelah empat tahap

$$\mathbf{P4} = \begin{array}{c|ccc} & S_1 & S_2 & S_3 \\ S_1 & .3380 & .2496 & .3624 \\ S_2 & .3744 & .2512 & .3744 \\ S_3 & .3624 & .2460 & .3880 \end{array}$$

Dan setelah delapan tahap matriks transisinya menjadi

P8=

$$\begin{array}{cccc} & S_1 & S_2 & S_3 \\ S_1 & .37533 & .25000 & .37467 \\ S_2 & .37500 & .25000 & .37500 \\ S_3 & .37467 & .25000 & .37533 \end{array}$$

Perbandingan keempat matriks di atas menunjukkan sebuah proses perkonvergenan yang cepat menuju sistem *state yang seimbang. State* yang seimbang ini ditunjukkan dengan matriks batas **A** :

$$\mathbf{A} = \begin{array}{cccc} & S_1 & S_2 & S_3 \\ S_1 & .3750 & .25000 & .3750 \\ S_2 & .3750 & .25000 & .3750 \\ S_3 & .3750 & .25000 & .3750 \end{array}$$

Dan vektor peluang α = (.3750, .2500, .3750) mempertahankan sistem dalam keseimbangan.

Konsep Ekuilibrium

Dalam konsteks ini, ide ekuilibrium (keseimbangan) dapat didefinisikan sebagai banyaknya rata-rata kapal yang masuk dan keluar samudera tertentu pada selang waktu yang diberikan adalah sama. Dalam beberapa hal konsep keseimbangan ini analog dengan pola populasi nasional yang stabil. Misalnya struktur usia populasi dalam kondisi sosio-ekonomi yang konstan cenderung untuk mempertahankan *state* ekuilibriumnya, tetapi bentuk sebaran ekuilibrium ini boleh jadi berbeda-beda pada setiap negara. Jika terjadi goncangan yang hebat seperti perang, kelaparan, atau kemajuan teknologi (misalkan pengendalian kelahiran, vaksin dsb), distribusi usia dapat berubah secara mencolok. Dalam par-perang Dunia I di Eropa, piramida populasi di Inggris, Perancis, Jerman dan Italia memiliki susunan yang sama. Akan tetapi setelah konflik memakan korban cukup besar terutama dari kelompok laki-laki usia 20-45 tahun khususnya di Jerman, pola ini berubah secara mencolok. Tanpa memperhitungkan Perang Dunia yang lain, piramida populasi ini perlahan-lahan kembali ke pola asalnya 60 tahun kemudian. Ini bukan berarti suatu pola khusus akan selalu sama dalam jangka panjang karena kondisi sosio-ekonomi terus menerus berubah. Dalam analisis Rantai *Markov* untuk tujuan permodelan, sebaran ekuilibrium digunakan untuk melihat apa yang akan terjadi jika pola pergerakan yang diamati saat ini tidak mengalami goncangan, bukan untuk meramalkan *state* sistem berikutnya (dalam contoh ini sebaran kapal di tiga samudera). Pada contoh di atas peluang pembatas a_j (unsur dari matriks **A**) berada di *State* S_j bebas dari *state* awal dan menunjukkan lamanya suatu proses dapat diharapkan berada di *state* S_j selama sejumlah besar pergerakan dan setelah sejumlah besar tahapan dari $\mathbf{p}^{(0)}$. Hal ini ditimbulkan dari hukum jumlah besari bagi Rantai *Markov* reguler. Dalam contoh kita, setelah sejumlah besar periode 37.5 % dari kapal-kapal akan berada di Hindia, 25 % di Pasifik, dan 37.5 % di Atlantik.

Matriks Fundamental

Matriks batas merupakan salah satu sifat Rantai *Markov* Reguler yang penting. Sifat deskriptif lainnya dapat dihitung dari **Z** atau matriks Fundamental. Perincian dari aljabar matriks yang berhubungan dengan perhitungan ini dijelaskan oleh Kemeny dan Snell (1967) dan agar dapat dilakukan perbandingan, notasi yang dituliskan di bawah ini tidak berubah, kecuali jika sebaliknya akan diberitahukan. Dalam notasi matriks

$$\mathbf{Z} = (\mathbf{I} - (\mathbf{P} - \mathbf{A}))^{-1} \qquad (5)$$

Dimana

I adalah Matriks Identitas
P adalah Matriks reguler
A adalah Matriks batas dari **P**

Dengan menggunakan contoh kapal dan samudera di atas, diberikan matriks **P** dan **A** sehingga

$$(\mathbf{I} - \mathbf{P} + \mathbf{A}) = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} S_1 & S_2 & S_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{array} & \begin{pmatrix} .775 & .050 & .175 \\ .075 & .850 & .075 \\ .175 & .050 & .775 \end{pmatrix} \end{array}$$

Invers dari matriks ini adalah

$$\mathbf{Z} = (\mathbf{I} - \mathbf{P} + \mathbf{A})^{-1} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} S_1 & S_2 & S_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 1.36458 & -1.06250 & -0.3020 \\ -0.09375 & 1.18750 & -0.0937 \\ -0.30208 & -0.06250 & 1.36459 \end{pmatrix} \end{array}$$

Walaupun matriks fundamental **Z** memiliki beberapa sifat yang sama dengan matriks transisi, matriks ini tidak harus berisi unsur-unsur yang tak negatif. Matriks **Z** menggambarkan secara sederhana bagaimana sistem ini mendekati ekuilibrium dari sebaran awal yang diberikan, yaitu : dari sembarang *state* awal, nilai presentase harapan dari lamanya sistem menghabiskan waktu di *state j* mendekati nilai *aj* seiring dengan semakin besarnya n periode waktu; tetapi dari *state i* yang diberikan, selisih presentase harapan dengan *aj* sebesar kira-kira (Z_{ij}-*aj*)/n. Hal yang penting dari matriks **Z** adalah penggunaan dalam perhitungan waktu rata-rata untuk bergerak dari satu *state* ke *state* yang lain. Sebaran yang menggambarkan variable acak ini disebut sebaran waktu perjalanan pertama dan nilai harapannya disebut waktu perjalanan pertama rata-rata.

Matriks Waktu Perjalanan Pertama Rata-Rata

Matriks dari waktu perjalanan pertama rata-rata dilambangkan dengan **M** dan unsur-unsurnya, m_{ij}, menggambarkan waktu yang diharapkan untuk bergerak dari

S_i ke S_j pertama kalinya. Untuk rantai *Markov* reguler matriks waktu perjalanan pertama rata-rata diberikan oleh :

M = (I – Z + EZ$_{dg}$) D (6)

Dimana

I adalah matriks Identitas
Z adalah matriks fundamental
E adalah matriks yang semua unsurnya 1
Z$_{dg}$ adalah matriks **Z** yang unsur diagonalnya dibuat 0

D adalah matriks diagonal dengan unsur ke $j = \frac{1}{a_j}$

Sebagai contoh

$$\mathbf{M} = \begin{array}{c} \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} S_1 & S_2 & S_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2.66667 & 5.00002 & 4.44447 \\ 3.88890 & 4.00002 & 3.88891 \\ .4.44446 & 5.00002 & 2.66668 \end{pmatrix} \end{array}$$

Karena unsur M_{ij} = $\mathbf{M}_i[f_j]$ mewakili periode waktu rata-rata-dalam kasus kita hádala selang waktu 1 tahun-untuk sampai pada *state* manapun yang diinginkan, rata-rata kapal membutuhkan waktu 5.0 tahun untuk berlayar dari Hindia ke Pasifik, dan 3.9 tahun untuk berlayar dari Pasifik ke Atlantik.

Matriks Simpangan Baku

Rata-rata dapat ditentukan oleh simpangan baku, dan dengan cara yang sama ragam dari lamanya perjalanan pertama rata-rata dapat memberikan informasi deskriptif serupa yang berguna.

Var $[f_j] = \mathbf{M}_i[f^2_j] - \mathbf{M}_i[f_j]^2$(7)

Kemeny dan Snell (1967, hal 82) mendefinisikan $\mathbf{M}_i[f^2_j]$ sebagai matriks momen kedua jumlah langkah yang dibutuhkan untuk mencapai *Sj*. Matriks itu adalah

W= M (2**Z$_{dg}$ D** –**I**) + 2 [**ZM** – **E**(**ZM**)$_{dg}$] (8)

Dimana (**ZM**)$_{dg}$ berasa; dari perkalian antara matriks fundamental dan matriks perjalanan pertama rata-rata yang unsur diagonalnya dibuat nol. Unsur-unsur dari matriks $\mathbf{M}_i[f_j]^2$ adalah kuadrat dari momen pertama matriks **M**. Perkalian hadamard **M** dilambangkan dengan **M$_{sq}$**. Perhitungan sederhana ini menghasilkan

Var$_i$ $[f_j]$ = **V** = **W** - **M$_{sq}$** (9)

Sehingga

$$\mathbf{M} = \begin{array}{c} \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} S_1 & S_2 & S_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 9.62973 & 20.00024 & 14.07428 \\ 13.08653 & 18.00024 & 13.08661 \\ 14.07420 & 20.00027 & 9.62978 \end{pmatrix} \end{array}$$

Karena pada contoh ini, simpangan baku dari lamanya perjalanan pertama, v_{ij}, lebih besar daripada rata-ratanya, M_{ij}, maka nilai rata-rata tidak bisa dijadikan nilai yang unik.

Teorema Limit Pusat untuk Rantai Harkov

Ukuran deskriptif yang paling penting didapat dari Teorema Limit Pusat untuk Rantai *Markov*. Perhitungan untuk sifat yang satu ini memerlukan unsur-unsur matriks kovarian pembatas. Unsur-unsur dari matriks **C** yiatu C_{ij} diberikan oleh

$C_{ij} = a_i Z_{ij} + a_j Z_{ji} - a_i d_{ij} - a_i a_j$ (10)

Dengan

a_{ij} adalah unsur dari matriks **A**
Z_{ji} adalah unsur dari matriks fundamental
d_{ij} adalah unsur dari matriks diagonal dimana unsur diagonalnya (d_{ij}) sama dengan kebalikan dari unsur diagonal matriks **A**

Pada contoh di atas matriks kovarian pembatasnya adalah

$$\mathbf{C} = \begin{array}{c} \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} S_1 & S_2 & S_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.50781 & -0.14062 & -0.36718 \\ -0.14062 & 0.28125 & -0.14062 \\ -0.36718 & -0.14062 & 0.50781 \end{pmatrix} \end{array}$$

Ragam pembatasnya, yaitu unsur diagonal dari matriks **C**, ditulis sebagai

$\beta = [b_j] = [C_{jj}]$

Pada contoh di atas, vektor
β = (0.50781, 0.28125, 0.50781)

Nilai yang muncul dari teorema Limit Pusat ini didapatkan Kemeny dan Snell (1967, hal 89) dari perlakuan berikut. Untuk setiap Rantai *Markov* Regular, kita misalkan $y^{(n)}{}_j$ sebagai lamanya waktu di *state* S_j pada n langkah pertama, serta $\alpha = a_j$ dan $\beta = b_j$ berturut-turut adalah vektor tetap dan vektor ragam pembatas. Jika $b_j \neq 0$ untuk setiap r > s

$$\Pr\left[r < \frac{y^{(n)}{}_j - na_j}{\sqrt{nb_j}} < s \right] \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_r^s e^{-\frac{x^2}{2}} dx \quad (11)$$

Saat n $\longrightarrow \infty$, untuk sembarang *state* awal k

Hasil integral di atas kurang lebih 0.681 untuk r = -1 dan s = 1; dan 0.954 untuk r = -2 dan s = 2, dan 0.997 untuk r = -3 dan s = 3.

Dengan menggunakan nilai alfa dan beta, teorema Limit Pusat memberikan nilai berikut, untuk Samudera Pasifik (S_2) pada contoh di atas

$$\frac{y^{(n)}{}_2 - 0.25n}{\sqrt{0.28125n}} \quad (12)$$

dimana untuk *n* yang besar, nilai ini akan mendekati sebaran normal. Nilai ragam pembatas yang tinggi menunjukkan nilai perkiraan yang rendah untuk jangka panjang dri model ilustrasi ini. Contohnya pada persamaan (12), setelah kurang lebih 100 selang waktu (tahun) persentase kapal di Pasifik dengan peluang 0.18, penyimpangan yang terjadi sekitar 25 % tidak lebih dari

$$\sqrt{100x0.2812} = 5.3\ \%$$

Semua sifat yang dibahas pada bagian ini hanya mengacu pada rantai *Markov* terbatas reguler yang harus dibedakan dengan Rantai *Markov* Penyerap. Pada model Rantai *Markov* penyerab sekurang-kurangnya terdapat satu *state* yang sekali dimasuki tidak bisa ditinggalkan. Dalam model struktur usia dari lingkaran hidup manusia, "kematian" akan menjadi *state* penyerap. Sifat yang berhubungan dengan Model Penyerab tidak akan dibahas disini karena penggunaannya cukup terbatas dalam bidang geografi. Salah satu pengecualian yang patut dicatat terdapat pada Marble (1964). Sifat formal, dari Rantai *Markov* Penyerab dikembangkan oleh Kemeny dan Snell (1967, bab 3) dan program komputer untuk menghitung kebanyakan sifat ini terdapat pada Marble (1967).

MEMBANGUN MODEL *MARKOV*

Sifat Markov

Dengan data yang cukup, sifat ini dapat ditentukan dengan inti teori statistik. Bagaimanapun perlu dicatat, bahwa sembarang matriks transisi menunjukkan adanya Model *Markov*, tapi kebergantungan parsial atau sifat *Markov*itas dari Rantai *Markov* membuatnya tidak cocok untuk menganalisis rangkaian kejadian yang saling bebas satu sama lain. Matriks transisi yang melukiskan rangkaian semacam itu seringkali disebut sebagai orde-0. Sebelum menentukan orde khusus dari matriks stokastik, kita perlu menguji keabsahan dari asumsi sifat *Markov*. Untuk keperluan ini, uji statistik yang tepat adalah Ukuran Perbandingan Kemungkinan Maksimum, yang dapat diperluas untuk menentukan orde-khusus dari proses tersebut. Rancangan uji di atas dikembangkan secara terpisah dalam studi Metode *Markov* oleh Anderson dan Goodman (1957) serta Kullbuck, Kupperman dan Ku (1962). Uji ini meliputi teori sebaran asimtotik dan uji Chi-Kuadrat yang berhubungan dekat dari bentuk yang biasa digunakan dalam tabel peluang. Dasar dari semua uji ini adalah nilai pengamatan yang sebenarnya untuk dicantumkan dalam "Matriks Pengamatan". Asumsikan matriks peluang transisi awal pada contoh tiga samudera di atas diturunkan dari pengamatan pada Tabel 2.

Tabel 2.Matriks Peluang Transisi pada tiga Samudera

	S_1	S_2	S_3	Total Marginal
S_1	120	40	40	200
S_2	60	80	60	200
S_3	120	120	360	600
Jumlah	300	240	460	1000

Dengan menggunakan ukuran perbandingan kemungkinan maksimum yang dikembangkan oleh Anderson dan Goodman (1957) untuk sifat *Markov*, kita dapat menguji hipotesis-null, yang menyatakan bahwa pergerakan kapal dari satu samudera ke samudera lain adalah bebas stokastik, berlawanan dengan alternatif yang menyatakan bahwa pengamatan menunjukkan kebergantungan parsial.

Uji Ukuran Perbandingkan Kemungkinan Maksimum untuk Sifat *Markov*

Secara umum, berikut ini menguji hipotesis-null bahwa matriks transisi stasioner memiliki ordo-0 yaitu $p_{ij}=p_j$ untuk semua i, berlawanan dengan alternatif orde-1.

Ukuran perbandingannya adalah

$$\lambda = \prod_{i,j}^{n} \left(\hat{p}_j / \hat{p}_{ij}\right)^{f_{ij}} \tag{13}$$

dimana peluang marginal

$$\hat{p}_j = \sum_i f_{ij} / \sum_i \sum_j f_{ij} = f_{.j} / f_{..}$$

dan

$$\hat{p}_{ij} = f_{ij} / \sum_j f_{ij} = f_{ij} / f_{i.}$$

dan f_{ij} adalah jumlah pengamatan pada setiap sel matriks. Statistik yang dibutuhkan adalah $-2\ ln \mid \lambda \mid$ yang pada hipotesis null mempunyai sebaran *Khi-Kuadrat* asimtotik dengan $(n-1)^2$ derajat bebas. Persamaan (13) dapat ditulis sebagai

$$-2 \ln \lambda = 2 \sum_{i=j}^{h} \sum_{j=1}^{n} f_{ij} \ln \frac{f_{ij} f_{..}}{f_{i.} f_{.j}} \tag{14}$$

Nilai $\hat{p}_j$ pada (13) didapatkan dengan menjumlahkan kolom pada masing-masing *state* dan dengan mengubahnya dalam bentuk proporsi, p_1 pada contoh di atas didapat dengan cara:

300/1000 = 0.3

dan terus diulang untuk semua p_j. Karena p_{11} adalah 0.6, statistik yang dibutuhkan untuk menghitung S_{11} adalah

$$120 \ln (0.6/0.3) = 83.17$$

Untuk setiap unsur matriks perhitungan ini diulang dan dijumlahkan secara aljabar, sehingga didapatkan Matriks N log **P** seperti pada Tabel 3.

Tabel 3 Matriks N Log **P**

$$
\begin{array}{c} \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} \quad S_1 \quad & \quad S_2 \quad & \quad S_3 \quad \end{array} \\
\begin{pmatrix} 83.1771 & -7.292 & -33.316 \\ 0.000 & 40.866 & -25.646 \\ -48.655 & -21.875 & 95.652 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

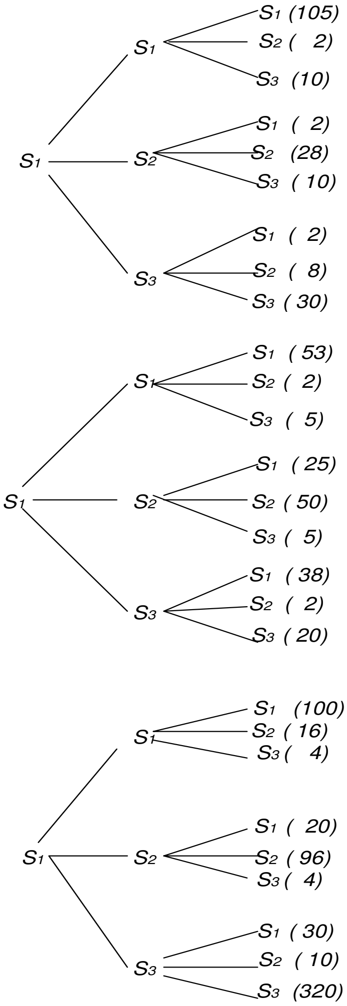
Jumlah dari setiap unsur digandakan dan dibandingkan dengan sebaran Khi-Kuadrat pada tingkat angka penting yang dipilih am $(n-1)^2$ derajat bebas. Karena dalam contoh hipotesis -2 ln λ = 165.8 jauh lebih besar daripada nilai pada Tabel Khi-Kuadrat untuk empat derajat bebas, hipotesis tentang percobaan saling bebas tidak berlaku.

Sifat *Markov* Orde-1

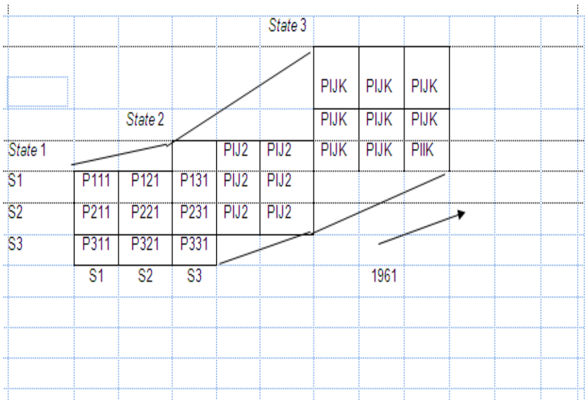
Sifat kebergantungan saja tidak cukup untuk membuat Model *Markov* orde-khusus. Asumsi dari kebanyakan studi yang dilakukan bahwa sembarang matriks transisi mencerminkan proses *Markov* Orde-1, berhubungan erat dengan asumsi kenormalan dalam penerapan prosedur statistik standar. Asumsi demikian biasanya dibangun dari data yang tidak cukup. Uji yang dilakukan oleh Anderson dan Goodman terhadap Rantai *Markov* orde-1 ternyata tidak bisa diterapkan pada matriks pengamatan dua dimensi yang sederhana. Uji ini membutuhkan pengamatan tentang pergerakan individual sedikitnya pada dua selang waktu; pengamatan seperti ini berbeda dari pengamatan agregat yang diperoleh dengan perbandingan *state-state* pada dua waktu tersebut. Sebagai contoh, asumsikan matriks pengamatan yang dibicarakan di atas berasal dari periode 1941-1951. Ini menunjukkan bahwa selama selang waktu tersebut, 40 kapal bergerak dari S_1 ke S_2 dan 120 kapal bergerak dari S_3 ke S_2, begitu seterusnya. Tapi untuk mengatakan data itu menggambarkan sebuah proses orde-1 dibutuhkan pengamatan pergerakan kapal per kapal selama selang waktu berikutnya (1951-1961). Dengan cara ini kita bisa menentukan peluang pergerakan kapal ke S_3 pada selang waktu berikutnya yang diberikan tentungan setelah kapal itu bergerak dari S_1 ke S_2. Gagasan ini diilustrasikan dengan baik oleh pohon peluang bersyarat (Gambar 1). Secara formal, pohon ini menunjukkan peluang bergeraknya kapal ke *state* *j* pada "realisasi" k+1 dengan syarat pergerakan dari *state* *i* ke *state* *j* telah terjadi pada realisasi k.

Pohon peluang ini memperlihatkan dari 40 kapal yang bergerak dari S_1 ke S_2 antara tahun 1941-1951, 28 di antaranya tetap berada di laut yang sama selama periode 1951-1961, 2 kapal kembali ke S_1 dan 10 kapal bergerak ke S_3. Data semacam itu paling baik ditunjukkan dengan tiga arah atau matriks kubik yang bentuk umumnya dapat dilihat pada Gambar 2.

Sebagai contoh hipotesis, ketiga permukaan atau sisi matriks kubik itu juga diperlihatkan pada gambar 2.



Gambar 1. Pohon Peluang untuk Rantai *Markov* Orde-1



	State 1 : 1961			State 2: 1961			State 3 : 1961		
	S1	S2	S3	S1	S2	S3	S1	S2	S3
S1	105	2	2	5	28	8	10	10	30
S2	53	25	38	2	50	2	5	5	20
S3	100	20	30	16	96	10	4	4	320

Gambar 2. Matriks Kubik untuk Rantai *Markov* Orde 1

Uji Ukuran Rasio Kemungkinan Maksimum untuk Sifat *Markov* Orde-1

Dengan tersedianya data yang cukup, kita dapat menguji hipetesis null bahwa rantai tersebut pastikan memiliki orde-1, bukan alternatif lainnya yaitu 0rde-2. Hipotesis null didefinisikan sebagai $p_{1jk} = p_{1jk} = \ldots = p_{njk} = p_{jk}$, untuk j,k=1, … , n. Ukuran rasio kemungkinan yang digunakan untuk menguji hipotesis ini adalah:

$$\lambda = \prod_{i,j,k=1}^{n} \left(\hat{p}_{jk} / \hat{p}_{ijk}\right)^{f_{ijk}} \qquad (15)$$

dimana

$$\hat{p}_{jk} = \sum_i f_{ijk} / \sum_i \sum_k f_{ijk} = f_{.jk} / f_{.j.}$$

dan

$$\hat{p}_{ijk} = f_{ijk} / \sum_k f_{ijk} / f_{ij.}$$

Di bawah asumsi hipotesis null, $-2\log\lambda$ menyebar Chi-kudrat asimtotik dengan n(n-1) derajat bebas.

Uji ini dilakukan Cullins pada matriks kubik berukuran 14x14 dari kategori ukuran pembangunan pabrik (penentuan ukuran berdasarkan pekerjaan). Data tahunan tersedia untuk periode 1961-1965 dan menghasilkan nilai-nilai pada tabel 4. Untuk semua realisasi, nilai dari $-2\log_e\lambda$ lebih kecil dari derajat bebasnya. Hipotesis null bahwa rantai ini memiliki orde-1 berlawanan dengan alternative yaitu orde-2, tidak ditolak dan perubahan struktur pekerjaan pabrik dikatakan sebagai proses *Markov* orde-1.

Tabel 4 Uji sifat orde-1 pada matriks kategori ukuran pengembangan yang berukuran 14x14

Realisasi	$-2\log_e\lambda$	D.F. $n(n-1)^2$
1961-63	697.62	2366
1962-64	631.21	2366
1963-65	607.78	2366
1961-65	610.16	2366

Konsep Kestasioneran

Teori dasar *Markov* mensyaratkan parameter yang stasioner sebagai tambahan sifat orde-1. Ini berarti perkiraan peluang transisi tetap atau konstan sepanjang waktu, dan sekaligus merupakan asumsi batasan teori *Markov*. Sering kali kita dapat memperkirakan suatu deret matriks transisi atau sekumpulan realisasi yang menggambarkan kecenderungan pada saat itu. Kekonstanan kecenderungan ini bias ditentukan dengan uj statistic. Uji statiatik yang dimaksud disini telah dikembangkan dengan menggunakan teori informasi (Kullback, Kupperman, dan Ku, 1962). Ada beberapa masalah Statistik Informasi Diskriminasi Minimum dan didefinisikan:

(a). "homogen-I", komponen bebas dua-arah

(b). "homogen bersyarat"komponen sifat *Markov*

(c). "homogen-(I,j), komponen bebas dua-arah oleh satu-arah

Uji Statistik Kehomogenan

Di bawah hipotesis kehomogenan (similaritas), statistiknya menyebar sebagai variable Chi-kuadrat pusat dengan deret bebas yang sesuai. Tabel 5 menginformasikan bentuk-bentuk umum dari sub-tabel yang terdiri dari *n* baris.

Unsur-unsur tabel dilambangkan dengan f_{kij} yang menunjukkan nilai pada sub-tabel k, baris i, dan kolom j. Titik yang menjadi subskrip menunjukkan penjumlahan dari bentangan indeks yang digantikan, dan $m = f$.

Asumsikan bahwa contoh acak dari bidang-bidang tanah yang didefinisikan secara sembarang menghasilkan matriks transisi berikut untuk kabupaten A (tabel 6) dan B (tabel.7).

Tabel 5.Tabel Informasi untuk Uji Statistik Kehomogenan

Komponen Informasi	Derajat Bebas
$2\sum_{k=1}^{s}\sum_{i=1}^{n} f_{ki.} \log_e \frac{m f_{ki.}}{f_{k..} f_{.i.}}$	(s-1)(n-1) (16)
$2\sum_{k=1}^{s}\sum_{j=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f_{kij} \frac{f_{kij}}{\frac{f_{ki.} f_{.ij}}{f_{.i.}}}$	n(s-1)(n-1) (17)
homogen bersyarat homogen (I,j)	
$2\sum\sum\sum f_{kij} \log_e \frac{m f_{kij}}{f_{k..} f_{.ij}}$	(s-1)(n^2-1) (18)

Tabel 6 Matriks Transisi untuk Kab. A

	P	C	U	W
P	272	72	26	0
C	31	143	42	4
U	0	24	53	3
W	0	1	7	22

Tabel 7. Matriks Transisi untuk Kab. B

	P	C	U	W
P	195	47	18	0
C	24	102	29	5
U	1	16	36	2
W	0	0	5	15

Apakah perubahan kegunaan tanah pada kedua kabupaten berlanjut dalam perlakuan yang sama? Apakah perubahan itu berlangsung pada tingkat yang sama? Perhitungannya dilakukan sebagai berikut :

Tabel 8: Unsur f_{kij}

K	*i* \ *j*	P	C	U	W	Total
Kab. A	P	272	72	26	0	270
	C	31	143	42	4	220
	U	0	24	53	3	80
	W	0	1	7	22	30
Kab. B	P	195	47	18	0	260
	C	24	102	29	5	160
	U	1	16	36	2	55
	W	0	0	5	15	20
Total		523	405	216	51	1195

Tabel 9: Unsur $f_{ki.}$

K	i \ j	P	C	U	W	Total
Kab. A		370	220	80	30	700
Kab. B		260	160	55	20	495
Total		630	380	135	50	1195

Tabel 10: Unsur $f_{.ij}$

	i \ j	P	C	U	W
P		467	119	44	0
C		55	245	71	9
U		1	40	89	5
W		0	1	12	37
Total		523	405	216	51

Data ini menghasilkan nilai-nilai berikut:

$$\sum_{k=1}^{2}\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} 2 f_{kij} \log_e f_{kij} = 10803.9 \quad (19)$$

$$\sum_{k=1}^{2}\sum_{i=1}^{4} 2 f_{ki.} \log_e f_{ki.} = 12730.3 \quad (20)$$

$$\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} 2 f_{.ij} \log_e f_{.ij} = 12429.1 \quad (21)$$

$$\sum_{k=1}^{2} 2 f_{k..} \log_e f_{k..} = 15314.0 \quad (22)$$

$$\sum_{i=1}^{4} 2 f_{.j.} \log_e f_{.j.} = 14351.7 \quad (23)$$

$$2 f_{...} \log_e f_{...} = 16935.3 \quad (24)$$

Dengan menggunakan nilai-nilai di atas, ketiga komponen informasi diperoleh dengan cara:
homogen-j = (27) + (31) – (29) – (30) = 0.1; *D.F.* = (*s*-1)(*n*-1) = 3
homogen bersyarat= (26)+(30)–(27)– (28) = 3.8; *D.F.* = *n*(*s*-1)(*n*-1) = 12
homogen-(j,k) = (26) + (31) – (29) – (28) = 3.9; *D.F.* = (*s*-1)(n^2-1) =15

Tabel 11: Analisis Informasi

Komponen	Informasi	D.F
Homogen-j	0.1	3
Homogen bersyarat	3.8	12
Homogen –(j,k)	3.9	15

Karena tak satupun dari nilai infomrasi ini penting pada kesimilaran tingkat 0.1 antara 2 kabupaten dalam hal total kegunaan tanah dan tingkat perubahan yang diindikasi. Oleh karena itu, asumsikan kita mempunyai dua realisasi pada contoh ketiga samudera pada tahun 1941-51 dan 1951-61, maka kita bisa menguji hipotesis bahwa kedua realisasi ini berasal dari matriks peluang transisi yang sama tapi tidak ditentukan. Dalam kasus kita himpunan ini terdiri dari S (yakni 2) realisasi rantai *Markov* orde-1 dengan *n* (yakni 3) *state*. Untuk ini hipotesis null adalah peluang pergerakan dari *state i* ke *state j* pada realisasi ke-*k*, yaitu p_k (S_j/S_i) adalah sama untuk semua *k* (*k*=1,2,…,*n*) untuk setiap pasang *i* dan *j* yang mungkin dimana i=1,2,…,*n* dan j=1,2,…,*n*. Harus ditekankan bahwa dengan mendemonstrasikan bahwa perbedaan antara deret realisasi cukup kecil untuk dijadikan acuan pada fluktuasi acak atau fluktuasi peluang, kita hanya menunjukkan bahwa kecenderungan masa lampau adalah konstan; tapi pada saat melakukan itu kita beri substansi dalam beberapa kasus pada asumsi bahwa kecenderungan masa depan untuk jangka pendek akan kontinu pada langkah konstan.

MODEL *MARKOV* SEBAGAI MEKANNISME PERAMALAN DALAM SISTEM TERBUKA

Secara umum, berdasarkan contoh awal rantai *Markov* telah digunakan sebagai model sistem tertutup. Jika ingin menggunakan model *Markov* untuk memprediksi atau meramalkan setidaknya dalam konteks ilmu geografi, biasanya perlu untuk mengubah modelnya. Dalam banyak studi geografi sebagai contoh, model yang diinginkan tidak hanya perpindahan yang dapat diamati dalam sistem tertutup dan dalam jumlah total yang selalu konstan terhadap selang waktu, tetapi juga kelahiran dan kematian dari variabel-variabel tertentu, seperti penduduk, pembangunan gedung, dan kota-kota. Pengamatan berdasarkan waktu terhadap variabel ini biasanya dicirikan oleh populasi yang berubah-ubah.

Ada beberapa prosedur alternative untuk mengubah model *Markov* tertutup menjadi yang dapat memproses kelahiran dan kematian dan juga pergerakan ke luar sistem yang diamati. Hanya dua alternative yang akan dijelaskan disini. Rogers (1966) menggunakan vektor kelahiran dan kematian yang terpisah yang digunakan sebagai operator yang berhubungan dengan matriks peluang transisi, yang kemudian metode ini diadopsi oleh Lindsay dan Barr (1972). Alternatif yang kedua diperkenalkan oleh Adelman (1958) dan telah digunakan oleh Lever (1972) dan Collins (1972). Matriks pengamatan Lever yang diperkirakan dari contoh populasi pada sistem empat daerah tahun 1959-1969 ditunjukkan sebagai berikut:

	Zona 1	Zona 2	Zona 3	Zona 4
Zona 1	118	13	4	14
Zona 2	6	33	8	6
Zona 3	1	1	68	5
Zona 4	2	0	3	43

(sumber; Lever, 1972, hal. 30)

dan matriks peluang transisinya:

	Zona 1	Zona 2	Zona 3	Zona 4
Zona 1	0.79	0.09	0.03	0.09
Zona 2	0.11	0.63	0.15	0.11
Zona 3	0.01	0.01	0.91	0.07
Zona 4	0.04	0	0.06	0.9

(sumber; Lever, 1972, hal. 30)

Contoh populasi dari kelahiran dan kematian diatur sepanjang sisi matriks pengamatan dengan keteraturan berikut:

	Z1	Z2	Z3	Z4	X
Z1	118	13	4	14	63
Z2	6	33	8	6	20
Z3	1	1	68	5	24
Z4	2	0	3	43	17
X	17	24	17	36	

(sumber: Lever, 1972, hal. 32)

Baris bawah X yang menunjukkan tempat kelahiran dan pendatang kota Glasgow pada tahun 1969, dan kolom paling kanan X menunjukkan tempat kematian dan penduduk yang keluar dari kota Glasgow. Masalah untuk melengkapi matriks baru ini adalah bagaimana mengisi kuadrat pada pojok kanan bawah, yang mungkin dapat dipandang sebagai bendungan yang berfungsi sebagai sumber pendatang sistem yang potensial dan sebagi kolam bagi perusahaan yang dilikuidasi. Kesulitan ini pertama kali diatasi oleh Adelman (1958) yang menyatakan bahwa angka yang sangat besar akan mencukupi dan besarnya angka tersebut tidak akan berpengaruh pada prediksi akhir model tersebut. Untuk mendukung pernyataan ini dengan menggunakan bukti matematikanya. Lever membenarkan ini dengan menggunakan bukti empiris dengan cara membandingkan hasil dari kedua matriks. Pada matriks pertama ia mengambil nilai 906 untuk bendungan tersebut, sehingga total unsure pada baris X adalah 1000. Matriks transisi Lever dengan vektor kelahiran dan kematian berbentuk:

	Z1	Z2	Z3	Z4	X
Z1	0.56	0.06	0.02	0.07	0.29
Z2	0.08	0.41	0.11	0.08	0.27
P =Z3	0.01	0.01	0.69	0.05	0.24
Z4	0.03	0	0.05	0.66	0.26
X	0.02	0.02	0.02	0.04	0.9

(sumber: Lever, 1972, hal. 32)

Jumlah contoh perusahaan di empat daerah pada tahun 1959 masing-masing adalah 212, 73, 99, 65, dan X 1000. Untuk keseluruhan sistem vektor peluang awaknya $p^{(0)}$ adalah
(0.147, 0.050, 0.068, 0.043, 0.692)
Untuk menurunkan $p^{(1)}$ yaitu sebaran pada tahun 1969, tinggal mengalikan vektor peluang awal dwngan matriks transisi **P** sehingga

$$p^{(1)} = p^{(0)}\,P = (0.11, 0.047, 0.072, 0.073, 0.708)$$

Ini berarti dari 447 perusahaan yang ada pada tahun 1959 dan 1000 pendatang potensial pada periode 1959-1969, peluangnya 0.100 bahwa suatu perusahaan akan berada di Zona 1 pada tahun 1969, 0.047 pada Zona 2, dan seterusnya. Ambil cara lain, misalkan dari 1447 perusahaan yang ada dan pendatang potensial 10% diantaranya akan berada di Zona 1 pada tahun 1969, 7.2 persen berada di Zona 3, dan seterusnya. Lever kemudian meningkatkan matriks transisi asal hingga sistem ini mencapai keseimbangan pada $p^{(8)}$. Sebaran peluang pertengahan didaftarkan dalam tabel 12.

Tabel 12: Nilai dari $p^{(n)}$

	Zona 1	Zona 2	Zona 3	Zona 4	X
$p^{(0)}$	0.147	0.050	0.068	0.043	0.692
$p^{(1)}$	0.100	0.047	0.072	0.073	0.708
$p^{(2)}$	0.077	0.043	0.075	0.090	0.715
$p^{(3)}$	0.064	0.040	0.078	0.100	0.718
$p^{(4)}$	0.057	0.038	0.078	0.105	0.721
$p^{(5)}$	0.054	0.037	0.079	0.109	0.721
$p^{(6)}$	0.051	0.035	0.080	0.112	0.722
$p^{(7)}$	0.050	0.034	0.080	0.113	0.723
$p^{(8)}$	0.049	0.034	0.080	0.115	0.722

(sumber: Lever, 1972, hal. 33)

Adelman menunjukkan bahwa pada keadaan ini dimungkinkan untuk mengabaikan proporsi perusahaan dalam X karena perhatian kita hanya ditujukan pada pabrik-pabrik yang nyata keberadaannya. Dengan menjumlahkan proporsi pada Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 pada setiap $p^{(n)}$ Lever menghitung presentasi perusahaan yang diharapkan dalam tiap periode waktu. Untuk t_1 (1969) jumlahnya adalah 0.292 dan presentasi masing-masing dalam tiap zona adalah 34, 16, 25 dan 25. Deret presentasi ini dibuat table oleh Lever dan didaftarkan dalam tabel 13.

Tabel 13: Prediksi Sebaran Perusahaan (persentase) X=1000

	Zona 1	Zona 2	Zona 3	Zona 4
t_0 (1959)	48	16	22	14
t_1 (1969)	34	16	25	25
t_2 (1979)	27	15	26	32
t_3 (1989)	23	14	28	35
t_4 (1999)	20	14	28	38
t_5 (2009)	19	14	28	39
t_6 (2019)	18	13	29	40
t_7 (2029)	18	12	29	41
t_8 (2039)	18	12	29	41

(sumber: Lever, 1972, hal. 33)

Lever dapat menyimpulkan jika arus kecenderungan ini berlanjut sampai tahun 2039 Zona 1 akan memiliki 18% dari seluruh perusahaan di Glasgow, dimana pada tahun 1959 daerah ini memiliki hampir setengahnya (48%). Sebaliknya, Zona 4 akan meningkatkan dari 14% pada tahun 1959 menjadi 41% pada tahun 2039. Lever kemudian menguji pembuktian matematika Adelman dengan mendemonstrasikan bahwa jika ukuran bendungan yang digandakan sampai 2000, proporsi prediksinya (tabel 14) hampir sama dengan yang dihasilkan oleh ukuran bendungan 1000.

Tabel 14: Prediksi Sebaran Perusahaan (persentase) X=2000

	Zona 1	Zona 2	Zona 3	Zona 4
t_0 (1959)	48	16	22	14
t_1 (1969)	34	16	25	25
t_2 (1979)	27	15	26	32
t_3 (1989)	23	14	27	36

t_4 (1999)	20	13	28	39
t_5 (2009)	19	13	28	40
t_6 (2019)	19	12	29	40
t_7 (2029)	18	12	29	41
t_8 (2039)	18	12	29	41

(sumber: Lever, 1972, hal. 34)

Harus dicatat bahwa pada tahap ini pembuktian Adelman dan pembuktian empiris oleh Lever hanya untuk menentukan proporsi prediksi dan tidak berdampak pada jumlah total pembangunan di Glasgow (Lever, 1972, hal. 35). Dengan mengubah ukuran dari bendungan, prediksi jumlah total pabrik mungkin akan terpengaruh sangat cepat walaupun proporsi setiap *state* tetap sama. Maka, meskipun prediksi *Markov* menunjukkan bahwa proporsi pabrik pada Zona 1 akan berkurangnya setengahnya relative terhadap semua pabrik, jumlah yang sebenarnya pada daerah ini bisa saja meningkat. Ukuran bendungan haruslah diperlakukan sebagai parameter yang diturunkan secara empiris dan penyeleksiannya harus ditangani secara hati-hati jika dibutuhkan pula jumlah prediksinya.

DAFTAR PUSTAKA

Adelman, L. G. (1958), A Stochastic Analysis Of The Size Distribution Of Firms. *Journal, American Statistical Association*, 53, 893- 904.

Anderson, T. W. Dan **Goodman, L. A.** (1957), Statistical Inference About *Markov* Chains. *Annals, Mathematical Statistics*, 28, 89-109.

Beshers, J. M. Dan **Laumann, E. O.** (1967), Social Distance: A Network Approach. *American Sociological Review*, 32, 225-236.

Blumen, I., Kogan, M., Dan **Mccarthy, P. J**. (1955), *The Industrial Mobility Of Labor As A Probability Process*. Ithaca, New York: Cornell University Press.

Bourne, L. S. (1969), A Spatial Allocation Land Use Conversion Model Of Urban Growth. *Jounal, Regional Science*, 9, 261-272.

Brown, L. A. (1963), The Diffusion Of Innovation; A *Markov* Chain-Type Approach, Discussion Paper No. 3. Department Of Geography, Northwestern University.

Brown, L. A. (1970), On The Use Of *Markov* Chains In Movement Research. *Economic Geography*, 46 (Supplement), 393-403.

Champernowne, D. G. (1953), A Model Of Income Distributions. *Economic Journal*, 63, 318-351

Clark, W. A. V. (1957), *Markov* Chains Analysis In Deography: An Application To The Movement Of Rental Housing Areas, *Annals, Association Of American Geograhers*, 55, 351-359.

Collins, L. (1972), *Industrial Migration In Ontario: Forecasting Aspects Of Industrial Activity Through Markov Chains Analysis*. Ottawa: Statistics Canada.

Compton, P. A. (1969), Internal Migration and Population Change In Hungary Between 1959 And 1965. *Transactions, Institute Of British Geographers,* 47, 111-130.

Drewett, J. R. (1969), A Stochastic Model Of The Land Conversion Process. *Regional Studies*, 3, 269-280.

Hamilton, F. E. I. (1967), Models Of Industrial Location. In: *Models In Geography*, (Eds) R. C Chorley Dan Peter Haggett, London: Mehuen Ch. 10.

Harris, C. C. (1968), A Stochastic Process Model Of Residential Development. *Journal, Regional Science*, 8, 29-39.

Harvey, D. (1967), Models Of The Evolution Of Spatial Patterns In Human Geography. In: *Models In Geography*, (Eds) R. J. Chorley And P. Haggett, London: Methuen Ch. 14.

Feller, W. (1969), *An Introduction ToProbability Theory And Its Application*. Vol. Edisi Ke-3. New York: John Wiley & Sons.

Kemeny, J. G. Dan **Snell, J. L**. (1967), *Finite Markov Chains*. Princeton, New Jersey. D. Van Nostrand Co.

Krenz, R. D. (1964), Ptojections Of Farm Numbers For North Dakota With *Markov* Chains. *Agricultural Economics Research,* 16, 77-83.

Kullback, S., Kupperman, M., Dan **Ku, H. H**. (1962). Tests For Contingency Tables And *Markov* Chains. *Technometrics*, 4, 572- 608.

Lever, W. F. (1972), The Intra-Urban Movement Of Manufacturing: A *Markov* Approach. *Transactions, Institute Of British Geographers*, 56, 21-38.

Lever, W. F. (1973), A *Markov* Approach To The Optimal Size Of Cities In England And Wales. *Urban Studies*, 10, 353-365.

Lindsay, I. Dan **Barr, B. M.** (1972), Two Stochastic Approaches To Migration: Comparison Of Monte Carlo Simulation And *Markov* Chain Models. *Geografiska Annaler*, 54b, 56-67.

Marble, D. (1967), *Some Computer Programs For Geografihic Research.* Special Publication No. 1, Departemen Of Geography, Northwestern University.

Pattison, A. (1965), Synthesis Of Hourly Rainfall Data. *Water Resources Research*, 1, 489-498.

Rogers, A. (1966), Matrix Methods Of Population Analysis. *Journal, American Institute Of Planners*, 32, 40-44.

Scott, A. J. (1965), A Procedure For The Estimation Of *Markov* Transition Probabilities, Discussion Paper No. 8, Regional Science Research Institue, University Of Pennsylvania.