

## PENGGUNAAN *GENERALIZED F TEST* PADA ANALISIS RAGAM SATU ARAH DENGAN RAGAM TIDAK HOMOGEN

**Bagus Sartono dan Farit M. Afendi**

Departemen Statistika  
Institut Pertanian Bogor, Bogor

**Pipin Andriyanto**

Product and Market Analyst  
pada PT. Pulsa Indomedia Pratama, Jakarta

### **Abstrak**

*Analisis ragam dengan ragam galat yang tidak homogen memerlukan penanganan yang khusus dalam penyelesaiannya. Hal yang umum dilakukan adalah dengan mentransformasi data. Melalui transformasi data diharapkan kehomogenan ragam akan terpenuhi sehingga proses pengujian dapat mendekati kesahihan. Namun, tidak mudah memperoleh transformasi yang menyebabkan asumsi kehomogenan ragam terpenuhi.*

*Untuk mengatasi masalah ini, dapat digunakan pendekatan yang disebut dengan prosedur *generalized F test*. Penelitian ini bertujuan untuk menerapkan *generalized F test* pada analisis ragam satu arah dengan ragam tidak homogen. Tulisan ini menyajikan penerapan uji tersebut pada data hasil percobaan mengenai pertanian dalam bidang hortikultura hibrida melon.*

*Berdasarkan tampilan visual dengan menggunakan diagram kotak garis, hasil respon dari kelima perlakuan yang diujicobakan memiliki kecenderungan berbeda. Namun perhitungan nilai  $p$  pada analisis ragam uji  $F$  konvensional didapat sebesar 0.117, hal ini disebabkan karena asumsi kehomogenan ragam tidak terpenuhi. Perolehan nilai  $p$  pada prosedur *generalized F test* didapat sebesar 0.0074. Kesimpulan yang diperoleh pada prosedur *generalized F test* sesuai dengan tampilan visual dari diagram kotak garis.*

*Kata Kunci: ragam tidak homogen, ANOVA, *generalized F test**

### **PENDAHULUAN**

Tidak terpenuhinya asumsi kehomogenan ragam dalam analisis ragam merupakan masalah yang sangat serius, karena hal ini terkait dengan kuasa uji (*power*) dari uji  $F$ . Analisis ragam dengan ragam yang tidak homogen memerlukan penanganan yang khusus dalam penyelesaiannya. Hal yang umum dilakukan adalah dengan mentransformasi data.

Melalui transformasi data diharapkan kehomogenan ragam akan terpenuhi sehingga proses pengujian dapat mendekati kesahihan. Namun terkadang, segala bentuk transformasi data yang dilakukan tidak membuat data menjadi homogen ragamnya.

Analisis ragam dengan ragam tidak homogen dikenal dengan masalah *Behrens-Fisher*. Permasalahan inilah yang akan peneliti kaji dalam karya ilmiah ini. Prosedur yang dilakukan untuk mengatasi masalah *Behrens-Fisher* adalah menggunakan prosedur yang disebut dengan *generalized F test*.

Tulisan ini menyajikan penerapan *generalized F test* pada analisis ragam satu arah dengan ragam tidak homogen.

### **TINJAUAN PUSTAKA**

#### **Analisis Ragam**

Analisis ragam diperkenalkan oleh Sir Ronald Aylmer Fisher pada tahun 1920-an. Pada dasarnya analisis ragam merupakan proses aritmatika untuk membagi jumlah kuadrat total menjadi komponen-komponennya yang berhubungan dengan sumber keragaman yang diketahui. Analisis ini telah dimanfaatkan dalam semua bidang penelitian yang menggunakan data kuantitatif (Steel dan Torrie 1993, Aunuddin 2005, Mattjik & Sumertajaya 2000, Montgomery 2001). Model yang digunakan dalam penelitian ini adalah analisis ragam satu arah

$$Y_{ij} = \mu + a_i + e_{ij}, \quad i = 1, \dots, k, \quad j = 1, \dots, n$$
dengan:

- $Y_{ij}$  = Pengamatan pada perlakuan ke-i dan ulangan ke-j
- $\mu$  = Rataan umum
- $a_i$  = Pengaruh perlakuan ke-i
- $e_{ij}$  = Pengaruh acak pada perlakuan ke-i ulangan ke-j

asumsi model ini sebagai berikut:

$$\sum \alpha_i = 0 \text{ dan } \text{var}(e_{ij}) = s^2 \text{ serta } e_{ij}^{BSI} \sim N(0, s^2)$$

atau dituliskan sebagai:

- kehomogenan ragam galat
- kenormalan galat percobaan
- kebebasan galat antar unit percobaan

### Generalized F Test untuk Analisis Ragam Satu Arah

Penguraian keragaman total pada analisis ragam satu arah menjadi komponen-komponen yang berhubungan dengan sumber keragaman yang diketahui pada prosedur *generalized F test* ini sebenarnya tidak jauh berbeda dengan uji F analisis ragam biasa

Berdasarkan Weerehandi (1995), penentuan komponen dari penguraian keragaman total pada analisis ragam satu arah didapat melalui standarisasi dari ragam masing-masing perlakuan, sehingga formula untuk menentukan nilai keragaman dari perlakuan sebagai berikut:

Hipotesis yang diuji adalah

$$H_0 : a_1 = a_2 = \dots = a_k = 0$$

*Standardized between-group sum of squares* sebagai berikut:

$$\tilde{S}_b = \tilde{S}_b(s_1^2, \dots, s_k^2)$$

$$= \sum_{i=1}^k n_i \bar{Y}_i^2 / s_i^2 - \frac{\left( \sum_{i=1}^k n_i \bar{Y}_i / s_i^2 \right)^2}{\sum_{i=1}^k n_i / s_i^2}$$

dengan nilai  $\bar{Y}_i$  didapat dengan menggunakan formula berikut:

$$\bar{Y}_i = \sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij} / n_i$$

Sedangkan nilai ragam menggunakan metode kemungkinan maksimum, formula sebagai berikut:

$$S_i^2 = \sum_{j=1}^{n_i} (Y_{ij} - \bar{Y}_i)^2 / n_i$$

Nilai  $p$  *generalized F test* sebagai berikut:

$$p = 1 - E \left[ H_{k-1, N-k} \left\{ \frac{N-k}{k-1} \tilde{S} \left[ \frac{n_1 s_1^2}{B_1 B_2 \dots B_{k-1}} \right] \right\} \right]$$

$$\left. \left. \left. \frac{n_2 s_2^2}{(1-B_1) B_2 \dots B_{k-1}} \right\} \left. \left. \frac{n_3 s_3^2}{(1-B_2) B_3 \dots B_{k-1}} \right\} \dots \left. \left. \frac{n_k s_k^2}{(1-B_{k-1})} \right\} \right\} \right)$$

$H_{k-1, N-k}$  pada formula di atas adalah fungsi kepekatan kumulatif distribusi F, dengan derajat bebas  $K-1$  dan  $N-K$ . Nilai  $B$  adalah peubah acak dengan sebaran beta dengan parameter sebagai berikut:

$$B_j \sim \text{beta} \left[ \sum_{i=1}^j \frac{(n_i - 1)}{2}, \frac{n_{j+1} - 1}{2} \right], j = 1, 2, \dots, k-1$$

Weerehandi (1995) menjelaskan bahwa Nilai  $p$  *generalized F test* dapat diperoleh dengan menggunakan simulasi Monte Carlo.

### Prosedur penerapan Generalized F Test

1. Hitung nilai rataan dan ragam (menggunakan metode kemungkinan maksimum) pada masing-masing perlakuan
2. Bangkitkan  $(k-1)$  buah bilangan acak beta ( $B_j$ ) dengan parameter sebagai berikut:

$$B_j \sim \text{beta} \left[ \sum_{i=1}^j \frac{(n_i - 1)}{2}, \frac{n_{j+1} - 1}{2} \right], j = 1, 2, \dots, k-1$$

3. Hitung nilai  $s_1^2, s_2^2, \dots, s_k^2$  dengan menggunakan formula sebagai berikut:

$$s_1^2 = \frac{n_1 s_1^2}{B_1 B_2 \dots B_{k-1}}$$

$$s_2^2 = \frac{n_2 s_2^2}{(1-B_1) B_2 \dots B_{k-1}}$$

$$s_3^2 = \frac{n_3 s_3^2}{(1-B_2) B_3 \dots B_{k-1}}$$

•

•

$$s_k^2 = \frac{n_k s_k^2}{(1-B_{k-1})}$$

4. Setelah didapat masing-masing nilai  $s_i^2$  pada langkah 3, masukkan masing-masing nilai  $s_i^2$  ke dalam formula *Standardized between-group sum of squares*:

$$\tilde{S}_b = \tilde{S}_b(s_1^2, \dots, s_k^2)$$

$$= \sum_{i=1}^k n_i \bar{Y}_i^2 / s_i^2 - \frac{\left( \sum_{i=1}^k n_i \bar{Y}_i / s_i^2 \right)^2}{\sum_{i=1}^k n_i / s_i^2}$$

5. Setelah itu, tentukan nilai kumulatif fungsi kepekatan peluang sebaran F sebagai berikut:

$$CdfF_{general} = \left( H_{k-1, N-k} \left\{ \frac{N-k}{k-1} \tilde{S}_b(s_1^2, \dots, s_k^2) \right\} \right)$$

Nilai  $\tilde{S}_b(s_1^2, \dots, s_k^2)$  didapat dari langkah 4

6. Ulangi langkah 2 sampai 5 sebanyak  $L$  kali
7. Tentukan nilai harapan dari fungsi kepekatan peluang pada langkah 5

$$E \left( H_{k-1, N-k} \left\{ \frac{N-k}{k-1} \tilde{S}_b(s_1^2, \dots, s_k^2) \right\} \right)$$

atau dengan kata lain adalah rata-rata  $CdfF_{general}$  terhadap banyaknya ulangan dari simulasi yang telah ditentukan, formula sebagai berikut:

$$\left( \sum_{i=1}^L CdfF_{general} \right) / L$$

8. Tentukan nilai  $p$  dari *generalized F test*, sebagai berikut:

$$p = 1 - \frac{\sum_{i=1}^L CdfF_{general}}{L}$$

Berdasarkan Weerehandi (1995), tingkat ketelitian nilai  $p$  dari simulasi yang dilakukan dapat di taksir dengan menggunakan rumus sebagai berikut:

$$\frac{3 \times s_h}{L^{1/2}}$$

dimana  $s_h$  adalah simpangan baku dari  $CdfF_{general}$  yang dihasilkan dari simulasi dan  $L$  adalah banyaknya simulasi yang dilakukan.

### BAHAN

Bahan yang digunakan dalam penelitian ini adalah data percobaan pertanian dalam bidang hortikultura hibrida melon. Percobaan ini menggunakan rancangan acak lengkap dengan 5 hibrida melon yang terdiri dari:

- Perlakuan A: H145
- Perlakuan B: H68
- Perlakuan C: H119
- Perlakuan D: H13
- Perlakuan E: H202

Setiap perlakuan diulang sebanyak 3 kali. Respon yang diamati adalah umur berbunga jantan masing-masing hibrida melon yang diujicobakan, di mana satuan data respon yang digunakan adalah dalam hari.

## HASIL DAN PEMBAHASAN

### Hasil Analisis Ragam Satu Arah

Pada tahap awal dilakukan analisis ragam untuk melihat apakah terdapat perbedaan pengaruh perlakuan terhadap respon. Data yang digunakan dapat dilihat pada Tabel 1.

Tabel 1. Data percobaan yang digunakan

PerlA	PerlB	PerlC	PerlD	PerlE
13.2	16	13.8	14.2	18.4
18	17	14	17.6	21.8
20.6	18.2	14	15.4	17.4

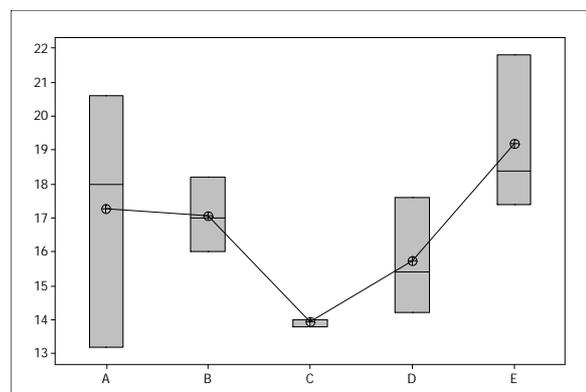
(Sismanti, 2006)

Berdasarkan hasil dari Tabel 2, dapat dilihat bahwa perlakuan E memiliki nilai rata-rata yang paling tinggi dibandingkan dengan perlakuan yang lain, sedangkan perlakuan C memiliki nilai rata-rata yang terendah.

Tabel 2. Statistik deskriptif masing-masing perlakuan

Perlakuan	n	$\bar{x}$	s	$s^2$
A	3	17.27	3.75	14.09
B	3	17.067	1.102	1.21
C	3	13.933	0.115	0.01
D	3	15.733	1.724	2.97
E	3	19.2	2.31	5.32

Gambar 1 menunjukkan pola sebaran data dari masing-masing perlakuan. Secara intuitif dari diagram kotak garis pada Gambar 1 memperlihatkan bahwa perlakuan C dan perlakuan E memiliki kecenderungan berbeda secara signifikan dalam nilai tengah. Demikian juga antara C dengan B.



Gambar 1. Diagram kotak garis masing-masing perlakuan

Akan tetapi, dari hasil pengujian analisis ragam pada Tabel 3 menunjukkan bahwa kesimpulan yang didapat adalah terima  $H_0$  pada

taraf nyata 5%. Atau perbedaan rata-rata kelima perlakuan tidak signifikan.

Tabel 3. Hasil analisis ragam satu arah lima perlakuan

SK	db	JK	KT	F	p
perlakuan	4	45.83	11.46	2.43	0.117
Error	10	47.23	4.72		
Total	14	93.06			

Kesimpulan yang diperoleh berdasarkan Tabel 3 terasa kontradiktif terhadap tampilan visual yang dihasilkan oleh Gambar 1. Hal ini kemungkinan terjadi karena asumsi kehomogenan ragam tidak terpenuhi. Dapat dilihat dari Gambar 1 bahwa perlakuan C memiliki ragam yang jauh lebih kecil dari perlakuan lain, terutama perlakuan A.

Uji F gagal untuk menolak  $H_0$ , padahal dari tampilan diagram kotak garis terdapat kecenderungan perbedaan pengaruh perlakuan. Untuk menyelesaikan masalah pelanggaran asumsi ini diterapkan prosedur *generalized F test*.

#### Pengujian Pengaruh Perlakuan dengan Prosedur *Generalized F Test*

Hasil pengujian menggunakan prosedur *generalized F test* dengan pembangkitan  $k-1$  bilangan acak beta sebanyak 10000 kali, didapat nilai  $p$  *generalized F test* sebesar 0.0074 (makro MINITAB dapat diperoleh dengan menghubungi penulis). Berdasarkan nilai  $p$  yang didapat dari metode *generalized F test*, maka kesimpulannya adalah terdapat perbedaan pengaruh perlakuan pada taraf nyata 5%.

Tabel 4. Hasil uji perbandingan berganda beda nyata terkecil

Uji lanjut	Selisih absolut	Nilai kritis	Kesimpulan
A vs B	0.20	6.605	Terima $H_0$
A vs C	3.33	6.341	Terima $H_0$
A vs D	1.53	6.975	Terima $H_0$
A vs E	1.93	7.439	Terima $H_0$
<b>B vs C</b>	<b>3.13</b>	<b>1.870</b>	<b>TOLAK <math>H_0</math></b>
B vs D	1.33	3.454	Terima $H_0$
B vs E	2.13	4.315	Terima $H_0$
C vs D	1.80	2.918	Terima $H_0$
<b>C vs E</b>	<b>5.27</b>	<b>3.900</b>	<b>TOLAK <math>H_0</math></b>
D vs E	3.47	4.86	Terima $H_0$

Hasil pengujian lanjut perbandingan nilai tengah perlakuan menggunakan uji BNT (beda

nyata terkecil) yang telah dimodifikasi dikarenakan asumsi kehomogenan ragam galat tidak terpenuhi, dapat dilihat pada Tabel 4.

Berdasarkan Tabel 4, terdapat dua pasang perlakuan yang berbeda signifikan, yaitu perlakuan B dan C serta perlakuan C dan E. Hasil yang didapat sangat relevan jika dilihat dari Gambar 1.

### KESIMPULAN

Asumsi kehomogenan ragam galat pada analisis analisis ragam harus terpenuhi karena akan mempengaruhi hasil pengujian yang dilakukan. Jika asumsi kehomogenan ragam galat tidak terpenuhi, uji F akan cenderung menerima  $H_0$  (tidak terdapat perbedaan yang signifikan dari pengaruh perlakuan terhadap respon padahal sesungguhnya terdapat perbedaan antar pengaruh perlakuan). Penggunaan *generalized F test* dapat bekerja dengan baik pada analisis ragam satu arah walaupun kehomogenan ragam galat tidak terpenuhi.

### DAFTAR PUSTAKA

- Aunuddin. 2005. *Statistika: Rancangan dan Analisis Data*. Bogor. IPB Press
- Mattjik AA, Sumertajaya IM. 2000. *Perancangan Percobaan*. Bogor: IPB press.
- Montgomery D. 2001. *Design and Analysis of Experiment*. 5th. New York: John Willey & Sons
- Sismanti R. 2006. Evaluasi karakter hortikultura enam hibrida melon (*Cucumis melo L*) seri IV hasil pemuliaan pusat kajian buah-buahan tropika (PKBT) IPB. [Skripsi]. Bogor: Institut Pertanian Bogor
- Steel GD, Torrie JH. 1993. *Prinsip dan Prosedur Statistika : Suatu Pendekatan Biometrik*. Ed. ke-3. Terjemahan Bambang Sumantri. Jakarta: PT Gramedia Pustaka Utama.
- Weerahandi S. 1995. *ANOVA Under Unequal Error Variances*. Biometrics, 51, 589-599.

Ä