

FUNGSI MASSA PELUANG PADA POLA TITIK SPASIAL KELOMPOK DAN FUNGSI STATISTIK VMR TERHADAP PERUBAHAN UKURAN KUADRAN

Muhammad Nur Aidi
Departemen Statistika FMIPA-IPB

E-mail : nuraidi@yahoo.com

Abstrak

*Realisasi titik-titik secara spasial diwujudkan dengan pola titik-titik tersebut dalam ruang. Pola titik dalam ruang pada prinsipnya ada tiga macam, yakni pola titik spasial secara acak, pola titik spasial secara regular serta pola titik spasial secara kelompok. Tujuan penelitian ini adalah menentukan fungsi massa peluang yang menggambarkan sebaran titik spasial kelompok, melakukan simulasi perubahan ukuran grid pada metode kuadran terhadap nilai VMR serta perubahan pola titik spasial kelompok. Langkah yang ditempuh adalah membangun fungsi massa peluang yang merupakan pembangkit sebaran spasial kelompok, serta melakukan simulasi pada analisis kuadran dengan membagi wilayah menjadi beberapa grid. Hasil yang ditunjukkan Sebaran spasial kelompok mempunyai fungsi massa peluang binomial negative serta nilai VMR > 1. Apabila Banyaknya Grid bersifat terbatas maka perubahan banyaknya grid tidak merubah kesimpulan bahwa VMR > 1 yang artinya sebaran fungsi massa peluang binomial negative akan mempunyai sebaran titik spasial bersifat kelompok. Nilai VMR merupakan fungsi eksponensial terhadap banyaknya grid, yakni $VMR = 4,976371 \exp(-0,003138 * \text{banyaknya grid})$.*

Kata kunci : VMR, grid, fungsi massa peluang

PENDAHULUAN

Realisasi titik-titik secara spasial diwujudkan dengan pola titik-titik tersebut dalam ruang. Pola titik dalam ruang pada prinsipnya ada tiga macam, yakni pola titik spasial secara acak, pola titik spasial secara regular serta pola titik spasial secara kelompok. Pola titik spasial secara kelompok disebabkan oleh proses yang mendorong titik-titik tersebut bergerak untuk mendekati sumber-sumber tertentu. Kasus ini dapat ditemui pada pola ikan di lautan. Ikan-ikan kecenderungannya akan mengelompok ke tempat yang jumlah planktonnya banyak serta suhu, dan suasana airnya sesuai dengan kebutuhan hidupnya. Demikian pula sebaran titik spasial pada sebaran apartemen-apartemen yang mengelompok pada wilayah pusat perkantoran, maupun pusat bisnis agar biaya transportasi serta waktu tempuh dapat diperkecil. Banyak contoh-contoh lain yang menunjukkan sebaran titik spasial yang bersifat kelompok. Oleh karena itu sangatlah penting menduga bentuk sebaran titik spasial

apakah bersifat kelompok atau bukan. Ada dua strategi untuk mendeteksi sebaran titik spasial kelompok yakni menduga fungsi massa peluang sebaran titik tersebut atau menentukan statistik hitung yang mengindikasikan apakah sebaran titik spasial bersifat kelompok atau bukan. Metode yang sering digunakan adalah analisis kuadran. Pada analisis kuadran, sebuah wilayah dibagi ke dalam sebuah grid yang terdiri dari beberapa kuadran dengan ukuran yang sama dan titik-titik menyebar secara acak di dalamnya. Kuadran biasanya berbentuk persegi (Silk, 1979; Rogers, 1974).

Penelitian ini bertujuan untuk menentukan fungsi massa peluang yang menggambarkan sebaran titik spasial kelompok dan melakukan simulasi perubahan ukuran grid pada metode kuadran terhadap nilai VMR serta perubahan pola titik spasial kelompok.

TINJAUAN PUSTAKA

Metode Kuadran adalah sebuah planar (wadah) dibagi oleh grid-2 dan terbentuk sel-sel yang berukuran

sama yang disebut kuadran dan jumlah titik dalam setiap sel adalah acak. Kuadran umumnya berbentuk segi empat. Hipotesis yang dikembangkan adalah lebih mengarah apakah titik-titik terdistribusi regular atau kelompok atau random atau tidak random. *Regular point process* adalah sejumlah besar kuadran berisi satu titik, hanya beberapa kuadran yang kosong, dan sangat sedikit kuadran yang berisi lebih dari satu titik. *Clustered point process* adalah sangat banyak kuadran yang kosong, sangat sedikit kuadran yang memiliki satu atau dua titik dan beberapa kuadran mempunyai banyak titik yang merupakan penengah dari dua hal diatas adalah *random point process* (Rogers, 1974)

Ada tiga metode dalam analisis ini, yaitu:

1. Rasio ragam dan nilai tengah (*Variance-mean ratio* , selanjutnya disingkat VMR)

Rasio ragam dan nilai tengah digunakan untuk mengetahui apakah penyebaran titik spasial bergerombol, acak, atau regular. Rasio ragam dan nilai tengah yang lebih besar dari satu mengindikasikan penyebaran titik spasial lebih bergerombol, rasio ragam dan nilai tengah yang kurang dari satu mengindikasikan proses titik spasial lebih regular, sedangkan rasio ragam dengan nilai tengah yang sama dengan satu mengindikasikan penyebaran titik spasial acak.

2. Uji Hipotesis untuk analisis kuadran

Hipotesis yang akan diuji dalam metode ini adalah apakah penyebaran titik spasial menyebar acak. Statistik uji untuk uji hipotesis tersebut adalah :

$$(m - 1)VMR$$

dengan m adalah jumlah kuadran, VMR adalah Rasio ragam dan nilai tengah. Untuk jumlah kuadran yang kurang dari 30, $(m - 1)VMR$ menyebar mengikuti sebaran Khi-Kuadrat dengan derajat bebas $m-1$.

$$\begin{aligned} \chi^2 &= (m - 1)VMR \\ &= \frac{(m - 1)s^2}{\bar{x}} \\ &= \frac{(m - 1) \sum_{i=1}^m (x_i - \bar{x})^2}{\bar{x}(m - 1)} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^m (x_i - \bar{x})^2}{\bar{x}} \end{aligned}$$

Sedangkan untuk jumlah grid yang lebih dari 30, $(m - 1)VMR$ menyebar mengikuti sebaran Normal $(m - 1, 2(m - 1))$ (Schabenberger, 2009)

$$\begin{aligned} Z &= \frac{(m - 1)VMR - (m - 1)}{\sqrt{2(m - 1)}} \\ &= \left(\sqrt{\frac{m - 1}{2}} \right) (VMR - 1) \end{aligned}$$

3. Uji yang dikembangkan dengan menggunakan statistik Khi-Kuadrat yakni dengan menghitung perbedaan frekuensi observasi pada kuadran dengan distribusi frekuensi pada fungsi peluang tertentu. Jika nilai Khi-kuadrat hitung lebih kecil dari Khi-kuadrat table maka diputuskan bahwa distribusi mengikuti sebaran peluang tertentu dan sebaran titik spatial secara acak, atau regular atau kelompok (Silk, 1979; Rogers, 1974)

METODE PENELITIAN

Ada tiga metode yang dilakukan dalam penelitian ini yakni : a) Metode Matematika untuk mencari fungsi massa peluang sebaran titik secara kelompok dalam ruang, yakni melalui Asumsi :Peluang sebuah titik dialokasikan pada suatu sel adalah independen terhadap waktu dan peluang meningkat secara linier dengan jumlah titik yang telah ada dalam sel. b) Membangkitkan titik-titik dalam ruang (dua dimensi) secara kelompok dengan menggunakan Software R (Schabenberger, 2009; Cohen & Cohen, 2008) yang mempunyai sebaran peluang tertentu, pilihan nilai parameter dalam fungsi massa peluang dilakukan secara *arbitrer*, c) Melakukan simulasi dengan membagi area studi menjadi beberapa ukuran grid, yakni (3x3, 4x4, 5x5,.....,20x20) dan menghitung nilai VMR serta membangun VMR yang merupakan fungsi dari ukuran grid (Gambar 1)

HASIL DAN PEMBAHASAN

Distribusi Spasial untuk Acak/Random, Regular dan Kelompok (*Cluster*).

Bayangkan suatu wilayah studi yang di grid dengan sel berbentuk segi empat. Asumsikan pada saat awal ($t = 0$) tidak ada sel yang berisi sembarang titik, dan $p(r, t)$ adalah peluang sebuah sel grid mempunyai r titik selama waktu t . Asumsi : selama selang waktu ($t + dt$) sebuah titik menempati sebuah sel tertentu dimana telah mempunyai r titik dengan peluang $f(r, t) dt$ dan bahwa selang waktu tersebut adalah cukup pendek untuk tidak lebih dari satu titik untuk menempati satu sel yang diberikan pada selang waktu tersebut.

$$\begin{aligned} p(0, t + dt) &= p(0, t)[1 - f(0, t)dt] \\ p(r, t + dt) &= p(r, t)[1 - f(r, t)dt] \\ &\quad + p(r - 1, t)f(t - 1, t)dt \quad r = 1, 2, 3.. \end{aligned}$$

Persamaan di atas bagian kiri dan kanan dikurangi $p(r, t)$ dan dibagi dengan dt , dan selanjutnya *Limit* $dt \rightarrow 0$, maka

$$\frac{d}{dt}p(0, t) = -f(0, t)p(0, t),$$

$$\frac{d}{dt}p(r, t) = -f(r, t)p(r, t) + f(r - 1, t)p(r - 1, t) \quad (1)$$

$(r = 1, 2, 3, \dots)$

Fungsi pertama pada persamaan (1) dikalikan dengan s^0 , fungsi kedua pada persamaan (1) dikalikan s^1 dan fungsi ketiga pada persamaan (1) dikalikan dengan s^2 dan secara umum untuk fungsi ke n persamaan (1) dikalikan dengan s^{n-1} . Hasil penjumlahan persamaan-persamaan tersebut adalah :

$$\frac{d}{dt} \left[\sum_{r=0}^{\infty} p(r, t) s^r \right] = (s - 1) \left[\sum_{r=0}^{\infty} f(r, t) p(r, t) s^r \right]$$

dan dapat disederhanakan menjadi

$$\frac{d}{dt} G(s; t) = (s - 1)L(s; t)$$

dengan $G(s; t) = \sum_{r=0}^{\infty} p(r, t) s^r$ adalah fungsi pembangkit momen dari peubah acak r dan

$$L(s; t) = \sum_{r=0}^{\infty} f(r, t) p(r, t) s^r$$

Untuk menemukan $G(s; t)$ kita harus memecahkan persamaan diferensial pada

$$\frac{d}{dt} G(s; t) = (s - 1)L(s; t).$$

Hasil distribusi apakah acak, regular atau kelompok tergantung pada asumsi yang dibuat pada $f(r, t)$. Catatan $f(r, t)$ adalah sebuah peluang dan satu kesatuan dengan nilai r . Perlu ditekankan peluang bahwa sebuah sel dengan r titik telah didapatkan dan satu titik lagi masuk pada selang waktu $(t, t + dt)$ Jika peluang ini adalah independen terhadap titik-titik yang ada dalam sel, maka dikenal sebagai dispersi acak Pada sisi lain peluang ini menurun pada saat jumlah titik dalam sel meningkat didefinisikan sebagai dispersi regular. Terakhir, jika peluang meningkat seiring dengan meningkatnya jumlah titik yang ada dalam sel dikenal sebagai dispersi kelompok.

Dispersi Spasial Cluster (Kelompok) :Distribusi Binomial Negatif

Peluang sebuah titik dialokasikan pada suatu sel diasumsikan independen terhadap waktu dan peluang meningkat secara linier dengan jumlah titik yang telah ada dalam sel.

$$f(r, t) = c + br) \quad (c > 0, b > 0)$$

maka

$$\begin{aligned} L(s; t) &= \sum_{r=0}^{\infty} (c + br)p(r, t)s^r \\ &= c \sum_{r=0}^{\infty} p(r, t)s^r + b \sum_{r=0}^{\infty} r p(r, t)s^r \\ &= cG(s; t) + bs \frac{d}{ds} G(s; t) \end{aligned}$$

dengan $\frac{d}{dt} G(s; t) = (s - 1)L(s; t)$

atau

$$\frac{d}{dt} G(s; t) = (s - 1) \left[cG(s; t) + bs \frac{d}{ds} G(s; t) \right]$$

sehingga solusi

$$G(s; t) = [\exp bt - (\exp bt - 1)s]^{-c/b}$$

Untuk sembarang titik dalam \bar{t} waktu, kita melakukan substitusi

$$p = \exp b\bar{t} - 1 \quad \text{dan } k = c/b$$

maka diperoleh

$$G(s; \bar{t}) = G(s) = (1 + p - ps)^{-k} \quad (2)$$

Persamaan (2) merupakan fungsi pembangkit momen distribusi binomial negatif

$$p(r) = \binom{k+r-1}{r} \left(\frac{p}{1+p}\right)^r \left(\frac{1}{1+p}\right)^k$$

kita menghitung fungsi pembangkit momen $G(s) =$

$$\begin{aligned} \sum_{r=0}^{\infty} p(r) s^r &= \sum_{r=0}^{\infty} \binom{k+r-1}{r} \left(\frac{p}{1+p}\right)^r \left(\frac{1}{1+p}\right)^k s^r \\ &= \left(\frac{1}{1+p}\right)^k \sum_{r=0}^{\infty} \binom{k+r-1}{r} \left[\left(\frac{p}{1+p}\right) s\right]^r \\ &= \left(\frac{1}{1+p}\right)^k \left[1 - \left(\frac{p}{1+p}\right) s\right]^{-k} = (1+p-ps)^{-k} \end{aligned}$$

Turunan $G(s)$ untuk mendapatkan rata-rata dan varian

$$E(r) = m_1 = G'(1) = kp$$

dan

$$\begin{aligned} \text{Var}(r) &= m_2 = G''(1) + G'(1) - [G'(1)]^2 \\ &= kp(1+p) \end{aligned}$$

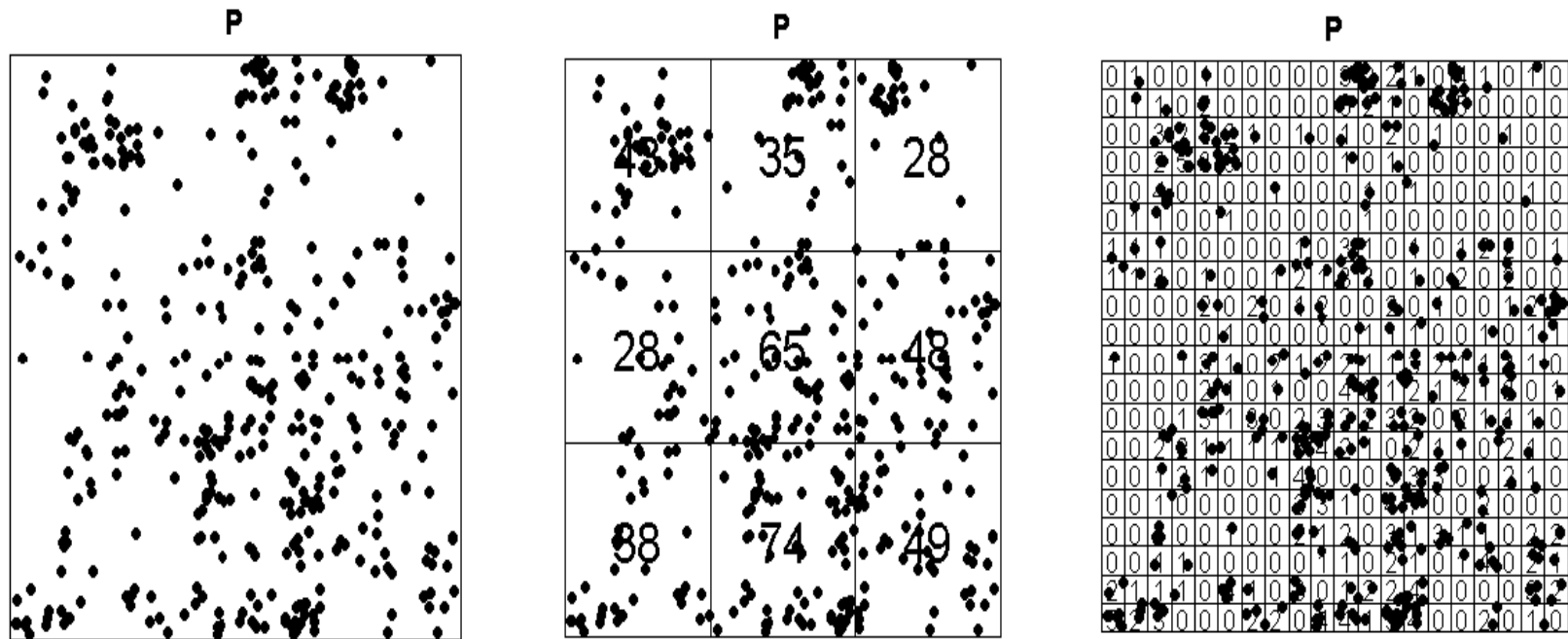
dengan

$$\text{VMR} = \frac{\text{var}}{\bar{x}} = (1+p) > 1$$

Dari pembuktian di atas maka sebaran spasial kelompok mempunyai fungsi massa peluang binomial negatif serta nilai $\text{VMR} > 1$.

Melakukan Simulasi Perubahan Ukuran Grid pada Metode Kuadran

Simulasi dilakukan dengan membagi wilayah studi berdasarkan grid-grid, yakni 3 x 3, 4 x 4, 5 x 5, 6 x 6, 7 x 7, 8 x 8, 9 x 9, 10 x 10, 11 x 11, 12 x 12, 13 x 13, 14 x 14, 15 x 15, 16 x 16, 17 x 17, 18 x 18, 19 x 19, 20 x 20. Setiap ukuran dilakukan penghitungan rata-rata = \bar{x} = Banyaknya titik dibagi dengan banyak grid yang berukuran sama. Selanjutnya dilakukan perhitungan ragam = $s^2 = \frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{m-1}$, dengan m adalah banyaknya grid. Hubungan antara ukuran kuadran dengan rata-rata, ragam, dan VMR disajikan pada Tabel 1. Dari Tabel 1 di atas Nampak bahwa nilai $\text{VMR} > 1$, yakni masih mengarah pada pola Kelompok. Namun demikian terjadi penurunan nilai VMR seiring dengan peningkatan jumlah grid yang dibuat. Pada Gambar 2 terlihat ada kecenderungan



a. Sebaran Titik Spasial

b. Sebarana Titik Spasial dengan Grid 3 x 3

c. Sebaran Titik Spasial dengan Grid 20 x 20

Gambar 1. Sebaran Titik Spasial Kelompok dengan Ukuran Grid

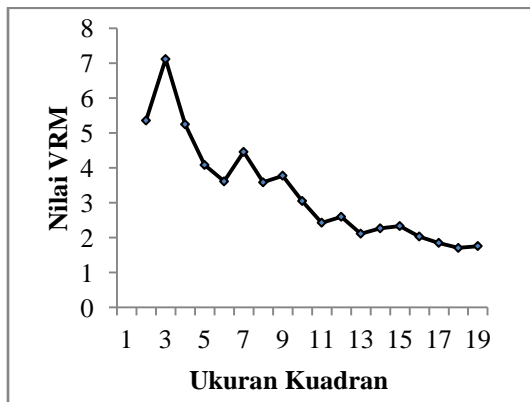
Tabel 1. Hubungan antara Ukuran Kuadran, Rata-Rata, Ragam, dan VMR

Ukuran kuadran	Mean	Ragam	VMR	Penyebaran
3x3	5.556	29.778	5.360	Kelompok(cluster)
4x4	3.125	22.250	7.120	Kelompok(cluster)
5x5	2.000	10.500	5.250	Kelompok(cluster)
6x6	1.389	5.673	4.085	Kelompok(cluster)
7x7	1.020	3.687	3.613	Kelompok(cluster)
8x8	0.794	3.539	4.459	Kelompok(cluster)
9x9	0.617	2.214	3.587	Kelompok(cluster)
10x10	0.500	1.889	3.778	Kelompok(cluster)
11x11	0.413	1.261	3.052	Kelompok(cluster)
12x12	0.347	0.844	2.430	Kelompok(cluster)
13x13	0.296	0.769	2.600	Kelompok(cluster)
14x14	0.255	0.540	2.116	Kelompok(cluster)
15x15	0.222	0.504	2.268	Kelompok(cluster)
16x16	0.195	0.456	2.334	Kelompok(cluster)
17x17	0.173	0.352	2.034	Kelompok(cluster)
18x18	0.154	0.286	1.851	Kelompok(cluster)
19x19	0.139	0.236	1.706	Kelompok(cluster)
20x20	0.125	0.220	1.759	Kelompok(cluster)

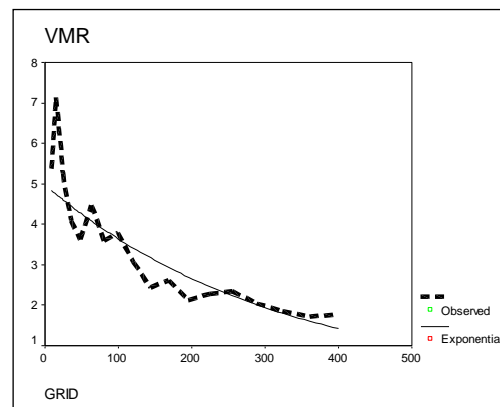
penurunan nilai VMR dengan peningkatan jumlah Grid. Pola penurunan menuju arah eksponensial Selanjutnya dilakukan fitting yang menghubungkan antara banyaknya grid dengan nilai VMR. Banyaknya grid mencakup 9, 16, ..., 40. Model yang dicobakan adalah sebagai berikut $VMR = a * e^{b*grid}$. Hasil ditunjukkan pada Tabel 2 serta Gambar 3.

Dari analisis ragam serta uji T menunjukkan bahwa fungsi eksponensial yang ditampilkan mempunyai nilai konstanta a, dan b yang signifikan; yang masing-masing bernilai a = 4,976 dan b=-0,003 sehingga persamaan regresi dugaannya adalah

$VMR = 4,976 \exp(-0,0031 * \text{banyaknya grid})$
 Persamaan dugaan tersebut mempunyai $R^2 = 85,145\%$, yang cukup besar.



Gambar 2. Pola Hubungan antara Banyaknya Grid dengan Nilai VMR pada Sebaran Spasial Kelompok



Gambar 3. Ploting Hasil Regresi dengan Data Pengamatan VMR

KESIMPULAN

1. Sebaran spasial kelompok mempunyai fungsi massa peluang binomial negative serta nilai $VMR > 1$.
2. Apabila Banyaknya Grid bersifat terbatas maka perubahan banyaknya grid tidak merubah kesimpulan bahwa $VMR > 1$ yang artinya sebaran fungsi massa peluang binomial negative akan mempunyai sebaran titik spasial bersifat kelompok.
3. Nilai VMR merupakan fungsi eksponensial terhadap banyaknya grid, yakni $VMR = 4,976371 \exp(-0,003138 \text{ banyaknya grid}) + \text{galat}$. Hal ini memberikan makna apabila banyaknya grid menuju tak hingga maka nilai VMR menuju 1 atau sebaran spasial menuju acak.

DAFTAR PUSTAKA

- Aidi.MN. 2000. Parameter dalam Fungsi Spasial (Kasus Metode Kriging). *Jurnal Sains dan Teknologi* 6(1):. 42-48, (ISSN: 0853-733X)
- Aidi.MN. & Saufitra I. 2008.. Perbaikan Metode Kriging Biasa (*Ordinary Kriging*) melalui Pemecahan Matriks S menjadi Beberapa Anak Matriks non overlap untuk mewakili Drift pada Peubah Spasial. *Jurnal Sains MIPA*, Vol. 14(3) :175-190.
- Aidi.MN. 2008. Penggunaan Rantai Markov untuk Analisis Spasial serta Modifikasinya dari Sistem Tertutup ke Sistem Terbuka. *Forum Statistika dan Komputasi* 13(1): 23-33. (ISSN 0853-8115)
- Aidi.MN. 2009. *Mapping AREAS OF Logging along Malaysia and Indonesia's and border Kalimantan*". Naskah Ilmiah yang disampaikan pada pertemuan International Seminar kerjasama antara Pasca Sarjana dengan The Pennsylvania State University, USA. Bogor 12-13 January 2009.
- Cohen Y & Cohen JY. 2008. *Statistics and Data with R: An applied approach through examples*. This edition first published 2008. John Wiley & Sons Ltd.
- Daniel W W. 1990. *Applied Nonparametrics Statistics*. Boston: PWS-KENT Publishing Company.
- Fauzi RF & Aidi.MN.. Analisis Efektifitas Metode Kriging Dan Invers Distance Dalam Melakukan Pendugaan Data Hilang Secara Spasial Melalui Simulasi Interpolasi Terhadap Data Hasil Perolehan Suara PILKADA Jawa Barat Tahun 2008. Naskah Ilmiah yang disampaikan pada pertemuan International Seminar kerjasama antara Pasca Sarjana dengan The Pennsylvania State University, USA. Bogor 12-13 January 2009.
- Isaaks, E. H. & R. M. Srivastava. 1989. *Applied Geostatistics*. Oxford University Press, New York.
- Niknami KA & Amirkhiz AC. 2008. A GIS Technical Approach to The Spatial Pattern Recognition of Archeological Site Distributions on The Eastern Shores of Lake Urmia, Northwestern Iran. Di dalam *The International Archives of the Photogrammetry, Remote sensing and Spatial Information Sciences, Volume XXXVII, 2008 :Part B4*.
- Novianti C & Aidi.MN .& Masykur M, 2008. Perbandingan Metode Invers Distance dan Kriging dalam Pemetaan Fosfor Tanah Sawah Kabupaten Ngawi. Skripsi Departemen Statistika FMIPA-IPB.
- Nursaid N & Aidi MN. 2002. Pendugaan dengan 2 kondisi Ketakstabilan pada Teknik Cokriging. Skripsi Departemen Matematika FMIPA-IPB.
- Olea RA. 1974. *Optimum Mapping Techniques using Regionalized Variable Theory*. Kansas Geological Survey.
- Reimann *et al.* 2008. *Statistical Data Analysis Explained Applied Environmental Statistics With R*. Vienna University of Technology. England : John Wiley & Sons Ltd
- Rogers A. 1974.. *Statistical Analysis of Spatial Dispersion*. London : Pion Limited.
- Rogerson, P. 2001. *Statistical Methods for Geography*. London : SAGE.
- Rokhma W &, Aidi MN. 2006. Sistem Ordinary Kriging untuk Matriks Data yang Dipartisi menjadi Empat Bagian. Wenny Rokhma S. 2006. Skripsi Departemen Matematika FMIPA-IPB.
- Saufitra I & Aidi.MN 2006. Perbandingan Tingkat Akurasi antara Ordinary Kriging Partisi dengan Ordinary Kriging non Partisi dengan Menggunakan Teknik Jackknife. Skripsi Departemen Matematika FMIPA-IPB.
- Schabenberger H. 2009. *Spatial count regression Repository* John Wiley and Sons. CRAN
- Shier R. 2004. Statistics: 1.4 Chi-squared Goodness of Fit Tes. <http://www.mlsc.lboro.ac.uk/resources/statistics/gofit.pdf> [terhubung berkala] (16 Januari 2009).
- Silk J. 1979. *Statistical Concept in Geography*. John Wiley and Sons, London
- Skelton A G. 1996. Quadrat Analysis Software for the Detection of Spatial or Temporal Clustering. *Statistics in Medicine* 15: 939-941.