DETERMINAN, INVERS, DAN NILAI EIGEN MATRIKS *SKEW-CIRCULANT* DENGAN ENTRI BARISAN GEOMETRI

M. F. Azhari[1], S. Guritman[2], *T. Wulandari[3], Jaharuddin[4], Siswandi[5]

[1)]Mahasiswa S1 Program Studi Matematika, FMIPA, Institut Pertanian Bogor
Jl Meranti, Kampus IPB, Darmaga Bogor
mirzafarhanazhari@apps.ipb.ac.id.

[2,3,4,5)] Departemen Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam,
Institut Pertanian Bogor, Jl. Meranti, Kampus IPB Dramaga Bogor.
sugigu@apps.ipb.ac.id, teduhma@apps.ipb.ac.id ***corresponding author**,
jaharuddin@apps.ipb.ac.id, siswandi@apps.ipb.ac.id.

Abstrak

Matriks *skew-circulant* adalah matriks segi yang entri terakhir setiap baris berpindah ke posisi utama dan berganti tanda disertai pergeseran semua entri lainnya ke posisi berikutnya. Dalam artikel ini, entri dari matriks *circulant* berupa entri barisan bilangan geometri. Tujuannya adalah merumuskan suatu formulasi sederhana dari determinan, invers, dan nilai eigen dari suatu matriks *skew circulant*. Formulasi determinan ditentukan dengan menerapkan serangkaian operasi baris dasar dan kolom dasar sampai diperoleh matriks diagonal. Langkah untuk mencari invers dilakukan dengan mengadaptasi metode dalam mencari determinan dan ekuivalensi baris dan kolom pada matriks. Dalam mencari nilai eigen digunakan konsep akar kesatuan (*roots of unity*) dan subgrup siklik.

Kata kunci: barisan geometri**,** determinan, grup siklik, invers, nilai eigen, *skew-circulant*

1 Pendahuluan

Matriks *circulant* memiliki peran penting dalam teori bilangan, kriptografi, *signal processing*, dan *image compression* [1]. Salah satu varian dari *circulant* adalah matriks *skew circulant,* yaitu matriks yang menyerupai *circulant* tetapi semua elemen di bawah diagonal utamanya berganti tanda menjadi negatif. Matriks ini merupakan matriks yang elemennya bergeser siklik satuan ke kanan, namun berganti tanda menjadi negatif sehingga disebut juga matriks negasiklik [2]. Ciri matriks ini memiliki struktur atau pola elemen yang mudah diamati dan berfokus pada elemen pada baris utamanya. Berdasarkan ciri ini, formulasi determinan, invers dan nilai eigen secara eksplisit dapat dilakukan. Berikut ini penjelasan mengenai matriks *circulant.* Misalkan $\delta = \{c_0, c_1, c_2, \dots, c_{n-2}, c_{n-1}\}$ merupakan sembarang barisan bilangan dan $p_\delta(x) = c_0 I + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_{n-1} x^{n-1}$ merupakan suatu polinomial. Didefinisikan pula suatu matriks permutasi sebagai berikut:

2020 Mathematics Subject Classification: 11B25, 15A15, 15A18.

Diajukan: 4/12/2023, diterima: 30/12/2023.

$$\eta = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 \\ -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Jika $x = \eta$ disubstitusikan ke dalam polinomial $p_\delta(x)$, maka diperoleh

$$p_\delta(\eta) = c_0 I + c_1\eta + c_2\eta^2 + \cdots + c_{n-1}\eta^{n-1} = SCirc(\delta)$$

yang merupakan matriks *skew circulant* dengan $SCirc(\delta)$ didefinisikan sebagai berikut

$$SCirc(\delta) = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_{n-3} & c_{n-2} & c_{n-1} \\ -c_{n-1} & c_0 & c_1 & \cdots & c_{n-4} & c_{n-3} & c_{n-2} \\ -c_{n-2} & -c_{n-1} & c_0 & \cdots & c_{n-5} & c_{n-4} & c_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -c_1 & -c_2 & \cdots & -c_3 & -c_{n-2} & -c_{n-1} & c_0 \end{pmatrix}.$$

Dalam matriks ini $\delta = \{\, c_0, c_1, c_2, \dots, c_{n-2}, c_{n-1}\}$ merupakan elemen pada baris pertama matriks *skew circulant* berordo $n \times n$.

Dalam artikel ini, dimisalkan barisan bilangan $c_0, c_1, \dots, c_{n-1}$ berupa barisan geometri, karena barisan geometri memiliki relasi rekurensi dalam bentuk yang sederhana sehingga memberikan kemudahan dalam memformulasikan determinan dan invers bahkan nilai eigen dari matriks *skew circulant*. Beberapa peneliti telah mengkaji masalah matriks *skew circulant*, terutama dalam cakupan determinan dan invers. Jiang and Hong pada [3] merumuskan formulasi eksplisit dari matriks *skew circulant* dengan entri barisan Tribonacci, kemudian Radicic pada [4] menjelaskan mengenai determinan dan invers matriks k-*circulant* dengan entri barisan geometri dan dilanjutkan oleh Jiang dan Wei [5] yang meneliti mengenai determinan, invers dan norm pada matriks *skew circulant* yang melibatkan bilangan Lucas dan Fibonacci. Masalah serupa dapat juga dijumpai pada [6],[7],[8],[9].

Berdasarkan latar belakang di atas, maka pada artikel ini akan dibahas matriks *skew circulant* dengan entri barisan geometri dan matriks *skew circulant* dengan polinomial *circulant* dan input matriks permutasi. Metode yang digunakan untuk memformulasikan determinan dan invers dalam artikel ini adalah serangkaian operasi baris dasar dan kolom dasar untuk memperoleh matriks yang ekuivalen. Dalam artikel ini, nilai eigen dari matriks *skew circulant* dengan entri barisan geometri ditentukan berdasarkan konsep grup siklik dari lingkaran satuan pada bidang kompleks dan keunikan dari barisan geometri.

2 Penelitian Sebelumnya

Misalkan $SC = SCirc(c_0, c_1, c_2, \dots, c_{n-1})$ merupakan matriks *skew circulant*, λ_k merupakan nilai eigen dan μ_k merupakan vektor eigen dari SC yang berpadanan dengan nilai eigennya, untuk $k = 0,1,2, \dots, n-1$. Berdasarkan [2] diperoleh formulasi dari λ_k dan μ_k berikut :

$$\lambda_k = \sum_{j=0}^{n-1} c_j (\sigma\omega^k)^j \tag{1}$$

atau

$$\begin{pmatrix}\lambda_0\\ \lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_{n-2}\\ \lambda_{n-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & \sigma & \sigma^2 & \cdots & \sigma^{(n-1)}\\ 1 & \sigma\omega & \sigma\omega^2 & \cdots & \sigma\omega^{n-1}\\ 1 & \sigma^2\omega^2 & \sigma^2\omega^4 & \cdots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \sigma^{n-2}\omega^{(n-2)(n-1)}\\ 1 & \sigma^{n-1}\omega^{n-1} & \sigma^{n-1}\omega^{2(n-1)} & \cdots & \sigma^{n-1}\omega^{(n-1)(n-1)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_0\\ c_1\\ \vdots\\ c_{n-2}\\ c_{n-1}\end{pmatrix}$$

dan

$$\mu_k=\left(1,\sigma\omega^k,\sigma^2\omega^{2k},\dots,\sigma^{n-2}\omega^{(n-2)k},\sigma^{n-1}\omega^{(n-1)k}\right)^T$$

dimana $\omega=\sigma^2=\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$ dan $\sigma=\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$, $i=\sqrt{-1}$.

Merujuk pada [10], himpunan $S=\{1,\omega,\omega^2,\dots,\omega^{n-2},\omega^{n-1}\}$ merupakan subgrup sikllik dengan order n dan $T=\{1,\sigma,\sigma^2,\dots,\sigma^{n-1}-1,\dots,-\sigma,\dots,-\sigma^{n-1}\}$ subgrup siklik dengan order $2n$ dari grup perkalian bilangan kompleks $\mathbb{C}^*=\mathbb{C}\setminus\{0\}$. Pada kasus ini, σ merupakan akar primitif (pembangkit) dari kedua subgrup S dan T. Semua elemen dari S merupakan akar kesatuan ke-n pada lapang kompleks $\mathbb{C}$ atau dengan kata lain merupakan solusi dari $x^n-1=0$ dan σ merupakan salah satu akar solusi dari $x^n+1=0$ di $\mathbb{C}$ yang merupakan salah satu dari pembangkit dari T

Merujuk pada [2] dan [11], maka formulasi determinan dan invers dari SC adalah sebagai berikut :

$$\det\left(SCirc(\delta)\right)=\prod_{k=0}^{n-1}\lambda_k=\prod_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}c_j\,(\sigma\omega^k)^j$$

dan

$$SCirc(\delta)^{-1}=SCirc(w_0,w_1,w_2,\dots,w_{n-1})$$

dimana $w_j=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\lambda_k\,\sigma^{-j}\,\omega^{-jk}$ untuk $j=0,1,2,\dots,n-1$. Formula untuk mencari invers ini dikenal sebagai *Invers Discrete Fourier Transform* (IDFT), kemudian untuk mencari determinan merupakan teorema determinan yang melibatkan nilai eigen n (lihat [7]), meskipun secara perhitungan mudah dilakukan, namun secara komputasi tidak efisien untuk diimplementasikan karena melibatkan aritmatik kompleks dalam perhitungannya serta perhitungan iteratif yang cukup lama untuk ukuran matriks yang cukup besar meskipun entri dari matriksnya bilangan riil.

3 Hasil dan Pembahasan

Pada bagian ini akan dibahas mengenai determinan, invers, dan nilai eigen secara keseluruhan, namun sebelum itu akan didefinisikan terlebih dahulu matriks *skew circulant* dengan entri barisan geometri. Untuk setiap bilangan bulat $n\geq 2$ dan a dan r merupakan konstanta yang berturut-turut merupakan nilai awal dan rasio dari barisan geometri $\left\{ar^{j-1}\right\}_{j=1}^{n}$ dimana $a\neq 0$, $r\neq 0$ dan $r\neq 1$. Matriks *skew circulant* dengan entri barisan geometri didefinisikan sebagai berikut :

$$B_{n,r,a}=SCirc(a,ar,ar^2,\dots,ar^{n-2},ar^{n-1}).$$

3.1 Determinan Matriks *Skew Circulant*

Teorema 3.1 Misalkan $B_{1,r,n}$ merupakan matriks *skew circulant* dengan entri barisan geometri dengan nilai awal barisan geometri $a = 1$, maka determinan dari $B_{1,r,n}$ dapat dinyatakan dalam bentuk

$$\det(B_{1,r,n}) = (1 + r^n)^{n-1}.$$

Bukti. Berdasarkan definisi matriks *skew circulant* dengan entri barisan geometri, diperoleh :

$$B_{1,r,n} = \begin{pmatrix} 1 & r & r^2 & \cdots & \cdots & r^{n-2} & r^{n-1} \\ -r^{n-1} & \ddots & & & & & \\ -r^{n-2} & \ddots & \ddots & & & & \\ -r^{n-3} & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 & \\ -r & -r^2 & \cdots & -r^{n-3} & -r^{n-2} & -r^{n-1} & 1 \end{pmatrix}.$$

Misalkan E_1 merupakan serangkaian operasi baris dasar yang diterapkan pada $B_{1,r,n}$ dengan mengganti baris ke- $(i+1)$ dengan hasil operasi baris ke- $(i+1)$ dijumlahkan dengan baris ke- 1 dikalikan r^{n-i} , untuk $i = 1,2,\dots,n-1$ sehingga diperoleh $B_{1,r,n} \sim D_1 = E_1(B_{1,r,n})$, dengan

$$D_1 = \begin{pmatrix} 1 & r & r^2 & \cdots & \cdots & r^{n-2} & r^{n-1} \\ 0 & \ddots & r(1+r^n) & \cdots & \cdots & r^{n-3}(1+r^n) & r^{n-2}(1+r^n) \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & r^2(1+r^n) & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & r(1+r^n) & r^2(1+r^n) \\ \vdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & (1+r^n) & r(1+r^n) \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & (1+r^n) \end{pmatrix}.$$

Misalkan E_2 merupakan serangkaian baris dasar yang diterapkan pada D_1 dengan mengganti baris ke-i dengan hasil operasi dari baris ke-i dikurangi baris ke-$(i+1)$ yang dikalikan dengan r, untuk $i = 2,3,\dots,n-1$ sehingga diperoleh $D_1 \sim D_2 = E_2E_1(B_{1,r,n})$, dengan

$$D_2 = \begin{pmatrix} 1 & r & r^2 & \cdots & \cdots & r^{n-2} & r^{n-1} \\ 0 & \ddots & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & (1+r^n) & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & (1+r^n) \end{pmatrix}.$$

Karena menerapkan operasi baris dasar jenis-3 maka determinan tidak berubah sehingga diperoleh determinan $\det(B_{1,r,n}) = \det(D_2) = (1 + r^n)^{n-1}$.

Dari pembuktian di atas muncul beberapa akibat dari Teorema 1, yaitu

Akibat 3.1 diberikan sembarang bilangan bulat $n \geq 2$ dan konstanta a dan r, dimana $a \neq 0$, $r \neq 0{,}1$, maka diperoleh

$$\det\left(B_{a,r,n}\right) = a^n (1 + r^n)^{n-1}.$$

Bukti. Karena $B_{a,r,n} = aB_{1,r,n}$, maka determinan dari $\det(B_{a,r,n})$ dapat dicari dengan menggunakan teorema determinan sehingga diperoleh $\det(B_{a,r,n}) = a^n(1 + r^n)^{n-1}$ oleh karena itu terbukti.

Akibat 3.2 Matriks *skew circulant* dengan entri barisan geometri adalah invertibel jika dan hanya jika $a \neq 0$ dan $r^n + 1 \neq 0$.

3.2 Invers Matriks *Skew Circulant*

Berdasarkan pembuktian Teorema 3.1, idapat matriks segitiga atas $D_2 = E_2 E_1 B_{1,r,n}$. Misalkan $P = E_2 E_1 I_n$. Maka

$$E_1 I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ r^{n-1} & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ r^{n-2} & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r^2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ r & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sehingga

$$P = E_2 E_1 I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -r & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -r & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -r \\ r & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Selanjutnya, misalkan K_1 merupakan operasi kolom dasar yang mengganti kolom ke-$(j+1)$ dengan hasil operasi kolom ke-$(j+1)$ dikurangi kolom ke-1 dikalikan dengan r^j, untuk $j = 1,2,3,\ldots,n-1$ sehingga diperoleh $B_{1,r,n} \sim D = E_2 E_1 B_{1,r,n}\, K$, dengan

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & (1+r^n) & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & (1+r^n) & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & (1+r^n) \end{pmatrix}$$

Akibatnya, ada matriks taksingular Q yang tak singular yang memenuhi $PB_{1,r,n}Q = D$ dengan

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & -r & -r^2 & \cdots & \cdots & -r^{n-2} & -r^{n-1} \\ 0 & \ddots & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriks P, Q dan D yang dihasilkan ini akan digunakan untuk membuktikan teorema berikut.

Teorema 3.2 Misalkan $B_{1,r,n}$ merupakan matriks *skew circulant* dengan entri barisan geometri dengan nilai awal barisan geometri $a = 1$, maka invers dari $B_{1,r,n}$ dapat dinyatakan dalam bentuk

$$B_{1,r,n}^{-1} = \frac{1}{1 + r^n} SCirc(1, -r, 0, \ldots, 0).$$

Bukti. Dengan menggunakan informasi dari metode sebelumnya diperoleh bahwa $PB_{1,r,n}Q = D \Leftrightarrow B_{1,r,n} = P^{-1}DQ^{-1}$, maka diperoleh $B_{1,r,n}^{-1} = QD^{-1}P$. Karena D matriks diagonal maka inversnya

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{(1+r^n)} & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{(1+r^n)} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{(1+r^n)} \end{pmatrix}$$

akibatnya, $B_{1,r,n}^{-1} = QD^{-1}P =$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -\frac{r}{(1+r^n)} & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{(1+r^n)} & -\frac{r}{(1+r^n)} & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & -\frac{r}{(1+r^n)} & 0 \\ \vdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{(1+r^n)} & -\frac{r}{(1+r^n)} \\ \frac{r}{(1+r^n)} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{(1+r^n)} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{(1+r^n)} \begin{pmatrix} 1 & -r & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -r & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & -r & 0 \\ \vdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & -r \\ r & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

atau

$$B_{1,r,n}^{-1} = \frac{1}{1+r^n} SCirc(1, -r, 0, \dots, 0).$$

Dari formulasi invers diperoleh beberapa akibat berikut.

Akibat 3.3 Misalkan n bilangan asli dengan $n \geq 2$, serta a, r bilangan real dengan $a \neq 0$ dan $r^n + 1 \neq 0$. Maka

$$B_{a,r,n}^{-1} = \frac{1}{a(1+r^n)} SCirc(1, -r, 0, \dots, 0).$$

Bukti. $B_{a,r,n} = aB_{1,r,n}$, maka

$$B_{a,r,n}^{-1} = \frac{1}{a} B_{1,r,n}^{-1} = \frac{1}{a(1+r^n)} SCirc(1, -r, 0, \dots, 0).$$

Akibat 3.4 Invers matriks *skew circulant* merupakan matriks *skew circulant* juga.

3.3 Nilai Eigen Matriks *Skew circulant*

Ingat kembali bahwa $S = \{1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-2}, \omega^{n-1}\}$ di bagian 2, bahwa semua elemen dari S secara geometri terletak pada lingkaran berjari-jari 1 pada bidang kompleks dan letak elemen itu membagi lingkaran menjadi n bagian sama besar, untuk $l = 1,2,3, \dots, \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$, sehingga dapat diperoleh

$$\omega^l + \omega^{n-l} = 2\cos(l\theta) \ dan \ \omega^l - \omega^{n-l} = 2i\sin(l\theta).$$

Sedangkan untuk $T = \{1, \sigma, \sigma^2, \dots, \sigma^{n-1} - 1, \dots, -\sigma, \dots, -\sigma^{n-1}\}$, semua elemen dari T secara geometri terletak pada lingkaran pada bidang kompleks dan membagi lingkaran menjadi $2n$ bagian sama besar dengan demikian untuk $h = 1,2,3 \dots, (n-1)$

$$\sigma^h + \sigma^{n-h} = 2i\sin(h\phi) \ dan \quad \sigma^l - \sigma^{h-l} = 2\cos(h\phi)$$

dengan $\theta = \frac{2\pi}{n}$ dan $\phi = \frac{\phi}{n}$. Persamaan di atas digunakan untuk membuktikan nilai eigen.

Teorema 3.3 Misalkan n bilangan asli dengan $n \geq 2$, serta a, r bilangan real dengan $a \neq 0$ dan $r^n + 1 \neq 0$. Misalkan $B_{n,r,a}$ merupakan matriks *skew circulant* dengan entri barisan geometri, dengan $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ adalah nilai-nilai eigen untuk $B_{a,r,n}$.

1. Jika n ganjil, maka $\lambda_0 = \frac{a(1+r^n)}{1+r}$, $\lambda_k = R_k + i\,C_k$ dan $\lambda_{n-k} = \overline{\lambda_k}$ untuk $k = 1,2, \dots, m$, dengan $m = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = \frac{n-1}{2}$ dan

$$R_k = a + a\sum_{t=1}^{m} (-1)^t \left(r^t - r^{n-t}\right) \cos(tk\theta)$$

$$C_k = a\sum_{t=1}^{m}(-1)^t\,(r^t + r^{n-t})\sin(tk\theta)$$

2. Jika n genap, maka $\lambda_k = R_k + i\,C_k$ dan $\lambda_{n-k-1} = \overline{\lambda_k}$ untuk $k = 0,1,2,\dots,m$, dengan $m = \left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor = \frac{n-2}{2}$, dan

$$R_k = a + a\sum_{t=1}^{m}(r^t - r^{n-t})\cos\big((2k+1)t\phi\big)$$

$$C_k = (-1)^k a r^{m+1} + a\sum_{t=1}^{m}(r^t + r^{n-t})\sin\big((2k+1)t\phi\big).$$

Bukti. Karena S dan T merupakan grup siklik, maka nilai eigen dari matriks $B_{a,r,n}$ mempunyai bentuk sebagai berikut

$$\begin{pmatrix}\lambda_0\\ \lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_{n-2}\\ \lambda_{n-1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & \sigma & \sigma^2 & \cdots & \sigma^{(n-1)}\\ 1 & \sigma\omega & \sigma\omega^2 & \cdots & \sigma\omega^{n-1}\\ 1 & \sigma^2\omega^2 & \sigma^2\omega^4 & \cdots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \sigma^{n-2}\omega^{(n-2)(n-1)}\\ 1 & \sigma^{n-1}\omega^{n-1} & \sigma^{n-1}\omega^{2(n-1)} & \cdots & \sigma^{n-1}\omega^{(n-1)(n-1)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ ar\\ \vdots\\ ar^{n-2}\\ ar^{n-1}\end{pmatrix}$$

1. Untuk kasus n ganjil, dapat dipilih $\sigma = -1$ karena σ merupakan akar primitif ke-$2n$ dari persamaan $x^n + 1 = 0$, yaitu $\sigma = \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$ sehingga dari persamaan diperoleh

$$\lambda_0 = a - ar + ar^2 - ar^3 + \cdots - ar^{n-2} + ar^{n-1}.$$

Perhatikan bahwa λ_0 merupakan deret geometri ganti tanda, dengan jumlah parsial adalah $\lambda_0 = \frac{a(1+r^n)}{1+r}$. Kemudian untuk $k = 1,2,\dots,m$ diperoleh

$$\begin{aligned}\lambda_k + \lambda_{n-k} &= 2a + \sum_{t=1}^{n-1} ar^t(-1)^t(\omega^{kt} + \omega^{-kt})\\ &= 2a + 2\sum_{t=1}^{n-1} ar^t(-1)^t\cos(tk\theta)\\ &= 2a + 2a\sum_{t=1}^{m}(-1)^t\,(r^t - r^{n-t})\cos(tk\theta)\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}\lambda_k - \lambda_{n-k} &= \sum_{t=1}^{n-1} ar^t(-1)^t(\omega^{kt} - \omega^{-kt})\\ &= 2ai\sum_{t=1}^{m}(-1)^t\,(r^t + r^{n-t})\sin(tk\theta).\end{aligned}$$

Jika kedua deret tersebut di atas dijumlahkan, maka diperoleh $\lambda_k = R_k + i\,C_k$ dimana

$$R_k = a + a\sum_{t=1}^{m}(-1)^t\,(r^t - r^{n-t})\cos(tk\theta)$$
$$C_k = a\sum_{t=1}^{m}(-1)^t\,(r^t + r^{n-t})\sin(tk\theta).$$

Kemudian, jika dikurangkan, maka diperoleh $\lambda_{n-k} = R_k - i\,C_k$.

2. Untuk kasus n genap dengan memisalkan $m = \left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor = \frac{n-2}{2}$, diperoleh bahwa $\sigma^{m+1} = i$ dan $\omega^{m+1} = -1$ sehingga diperoleh

$$\lambda_0 = \sum_{t=0}^{n-1} ar^t\,\sigma^t = a + a\sum_{t=1}^{m}(r^t\sigma^t + r^{n-t}\sigma^{n-t})$$

atau

$$\lambda_0 = a + a\left[\left(\sum_{t=1}^{m}(r^t - r^{n-t})\cos(\phi t)\right) + i\left(r^{m+1} + \sum_{t=1}^{m}(r^t + r^{n-t})\sin(\phi t)\right)\right]$$

dan untuk

$$\begin{aligned}\lambda_{m+1} &= \sum_{t=0}^{n-1} ar^t(-1)^t\sigma^t \Leftrightarrow a + (-1)^{m+1}ir^{m+1} + \sum_{t=m+2}^{n-1} ar^t(-1)^t\sigma^t \\ &= a + (-1)^{m+1}ir^{m+1} + a\sum_{t=1}^{m}(-1)^t(r^t\sigma^t + r^{n-t}\sigma^{n-t}) \\ &= a + a\left[\left(\sum_{t=1}^{m}(-1)^t(r^t - r^{n-t})\cos(\phi t)\right)\right. \\ &\qquad \left. + i\left((-1)^{m+1}r^{m+1} + \sum_{t=1}^{m}(-1)^t(r^t + r^{n-t})\sin(\phi t)\right)\right].\end{aligned}$$

Jika dituliskan dalam bentuk R_{m+1}dan C_{m+1}

$$R_{m+1} = a + a\sum_{t=1}^{m}(-1)^t(r^t - r^{n-t})\cos(\phi t)$$
$$C_{m+1} = a\left((-1)^{m+1}r^{m+1} + \sum_{t=1}^{m}(-1)^t(r^t + r^{n-t})\sin(\phi t)\right).$$

Selanjutnya untuk $k = 1,2,\dots,m$,

$$\lambda_k + \lambda_{n-k} = \sum_{t=0}^{n-1} ar^t\sigma^{(2k+1)t} + \sum_{t=0}^{n-1} ar^t\sigma^{-(2k+1)t}$$

Jadi:

$$\lambda_k + \lambda_{n-k} = 2a + i(-1)^k ar^{m+1} + a\sum_{t=m+2}^{n-1} r^t(\sigma^{(2k+1)t} + \sigma^{-(2k+1)t})$$

$$= 2a + i(-1)^k ar^{m+1} + 2ai \sum_{t=1}^{m} r^t \sin\big((2k+1)t\phi\big)$$

atau

$$\lambda_k + \lambda_{n-k} = 2a + 2i(-1)^k ar^{m+1} + 2ai \sum_{t=1}^{m} (r^t + r^{n-t}) \sin\big((2k+1)t\phi\big).$$

Analog untuk pengurangan, diperoleh

$$\lambda_k - \lambda_{n-k} = a \sum_{t=0}^{n-1} r^t (\sigma^{(2k+1)t} - \sigma^{-(2k+1)t})$$

$$= \sum_{t=m+2}^{n-1} r^t \sin\big((2k+1)t\phi\big) = 2a \sum_{t=1}^{m} (r^t - r^{n-t}) \cos\big((2k+1)t\phi\big)$$

Jumlahkan $\lambda_k + \lambda_{n-k}$ dengan $\lambda_k - \lambda_{n-k}$ diperoleh

$$\lambda_k = a + a \sum_{t=1}^{m} (r^t - r^{n-t}) \cos\big((2k+1)t\phi\big)$$
$$+ i\left((-1)^k ar^{m+1} + a \sum_{t=1}^{m} (r^t + r^{n-t}) \sin\big((2k+1)t\phi\big)\right)$$

maka diperoleh

$$R_k = a + a \sum_{t=1}^{m} (r^t - r^{n-t}) \cos\big((2k+1)t\phi\big)$$

$$C_k = (-1)^k ar^{m+1} + a \sum_{t=1}^{m} (r^t + r^{n-t}) \sin\big((2k+1)t\phi\big)$$

Selanjutnya dengan mengurangkan $\lambda_k + \lambda_{n-k}$ dengan $\lambda_k - \lambda_{n-k}$ diperoleh

$$\lambda_{n-k} = a + a \sum_{t=1}^{m} (r^t - r^{n-t}) \cos\big((1-2k)t\phi\big)$$
$$+ i\left((-1)^k ar^{m+1} + \sum_{t=1}^{m} (r^t + r^{n-t}) \sin\big((1-2k)t\phi\big)\right)$$

maka diperoleh

$$R_{n-k} = a + a \sum_{t=1}^{m} (r^t - r^{n-t}) \cos\big((1-2k)t\phi\big)$$

$$C_{n-k} = (-1)^k ar^{m+1} + \sum_{t=1}^{m} (r^t + r^{n-t}) \sin\big((1-2k)t\phi\big)$$

Hal terakhir yang akan dibuktikan adalah $\lambda_{n-k-1} = \overline{\lambda_k}$ untuk $k = 0,1,2, \ldots, m$. Didahului dengan membuktikan untuk kasus $k = m$, maka $\lambda_m = \overline{\lambda_{n-m-1}} = \overline{\lambda_{m+1}}$, hal ini bisa ditunjukan dengan melihat representasi grup siklik T dan S dan persamaan R_k dan C_k pada λ_k. Perhatikan bahwa

$$R_m = a + a\sum_{t=1}^{m}(r^t - r^{n-t})\cos\big((nt-t)\phi\big)$$

$$C_m = (-1)^m ar^{m+1} + a\sum_{t=1}^{m}(r^t + r^{n-t})\sin\big((nt-t)t\phi\big)$$

Karena $\cos\big((n-1)t\phi\big) = \begin{cases} \cos\big((n-t)\phi\big) = -\cos(\phi t) & t \text{ ganjil} \\ \cos((-t)\phi) = \cos(\phi t) & t \text{ genap} \end{cases}$, maka

$$R_m = a + a\sum_{t=1}^{m}(-1)^t(r^t - r^{n-t})\cos(t\phi) = R_{m+1}$$

Hal serupa, karena $\sin\big((nt-t)\phi\big) = \begin{cases} \sin\big((n-t)\phi\big) = \sin(\phi t) & t \text{ ganjil} \\ \sin\big((-t)\phi\big) = -\sin(\phi t) & t \text{ genap} \end{cases}$, maka

$$C_m = -\left((-1)^{m+1}ar^{m+1} + a\sum_{t=1}^{m}(-1)^t(r^t + r^{n-t})\sin(t\phi)\right) = -C_{m+1}$$

dan untuk $k = 0,1,2,\dots,m-1$, dapat dibuktikan bahwa

$$\begin{aligned}
\lambda_{n-k-1} &= \left(a + a\sum_{t=1}^{m}(r^t - r^{n-t})\cos\Big(\big(1-2(k+1)\big)\phi\Big)\right) \\
&\quad + i\left((-1)^{k+1}ar^{m+1} + a\sum_{t=1}^{m}(r^t + r^{n-t})\sin\Big(\big(1-2(k+1)\big)t\phi\Big)\right) \\
&= \left(a + a\sum_{t=1}^{m}(r^t - r^{n-t})\cos\big((2k+1)\phi\big)\right) \\
&\quad - i\left((-1)^k ar^{m+1} + a\sum_{t=1}^{m}(r^t + r^{n-t})\sin\big((2k+1)t\phi\big)\right) \\
&= \overline{\lambda_k}
\end{aligned}$$

4 Simpulan

Determinan dan invers dari matriks *skew circulant* dengan entri barisan geometri dapat diformulasikan secara eksplisit dalam bentuk yang lebih sederhana daripada menggunakan kasus umum. Dalam artikel ini, diawali dengan mendefinisikan matriks *skew circulant* dengan entri barisan geometri, kemudian mencari determinan dengan menerapkan serangkaian operasi baris dasar dan kolom dasar sehingga diperoleh suatu matriks yang ekuivalen baris P dan ekuivalen kolom Q dengan matriks $SCirc(\delta)$. Selanjutnya dengan memanfaatkan metode dalam mencari determinan, diperoleh invers matriks *skew cirulant* melalui persamaan berikut: $D = PSCirc(\delta)Q$ dimana matriks $SCirc(\delta) \sim D$. Terakhir untuk mencari nilai eigen dibutuhkan konsep subgrup siklik untuk memberikan penalaran perhitungan elemen-elemen pada nilai eigen dengan konjugatnya. Hasilnya diperoleh perhitungan yang lebih efisien tanpa melibatkan aritmatik bilangan kompleks dan teknik menghitung secara iteratif.

Daftar Pustaka

[1] Bozkurt D, Tam T-Y. 2012. Determinants and inverses of circulant matrices with Jacobsthal and Jacobsthal–Lucas Numbers. *Applied Mathematics and Computation*. 219(2):544– 551. DOI: https://10.1016/j.amc.2012.06.039.

[2] David PJ. 1979. *Circulant Matrices*.New York (US): John Wiley

[3] Jiang Z. and Li D., 2014, The invertibility, explicit Determinants, and inverses of circulant and left circulant and g-Circulant matrices involving any continuous fibonacci and lucas numbers. In *Abstract and Applied Analysis*, Hindawi Publishing Corporation, Volume: 2014. Article ID 931451, https://dx.doi.org/10.1155/2014/931451.

[4] Radicic B. 2019. On k-circulant matrices involving geometric sequence. *Hacettepe Journal of Mathematics & Statistics*. 48(3): 805-817. DOI htpps://10.15672/HJMS.2018.569.

[5] Wei Y., Zheng Y., Jiang Z., and Shon S., 2020, Determinants, inverses, norms, and spreads of skew circulant matrices involving the product of Fibonacci and Lucas numbers, *Journal Mathematics and Computer Sciences*, Volume: 20, pp. 64-78.

[6] Liu Z., Chen S., Xu W., and Zhang Y., 2019, The eigen-structures of real (skew) circulant matrices with some applications, *Journal Computational and Applied Mathematics*, Springar, Volume: 38, no. 178.

[7] Bueno ACF. 2020. On r-circulant matrices with Horadam numbers having arithmetic indices. *NNTDM*. 26(2):177–197. DOI: htpps://10.7546/nntdm.2020.26.2.177-197.

[8] Tee GJ. 2005. Eigenvectors of block circulant and alternating circulant matrices. *Res. Lett. inf. Math. Sci*. 8:123-142

[9] Bueno ACF. 2012. Right circulant matrices with geometric progression. *International Journal of Applied Mathematical Research¬*. 1(4): 593-603. doi: 10.14419/ijamr.v1i4.379.

[10] Guritman,S. Wulandari, T. 2023. A Fast Computation for the Determinant, Inverse, and Eigenvalues of Skew Circulant Matrices Involving Pell Numbers, submitted to *Maroccan Jurnal of Pure and Applied Analysis*.

[11] Aldrovandi R., 2011, *Special Matrices of Mathematical Physics*: Stochastic,Circulant and Bell Matrices, World Scientic, Singapore.