

PENGGUNAAN METODE ANALISIS HOMOTOPI PADA MODEL LOTKA-VOLTERRA DUA SPESIES

*Jaharuddin¹, Fahri Novi², dan Siswandi³

²Mahasiswa S-1 Program Studi Matematika, FMIPA,
Institut Pertanian Bogor, Jl. Meranti, Kampus IPB Dramaga Bogor.
Fahri_12@apps.ipb.ac.id

^{1,3}Departemen Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam,
Institut Pertanian Bogor, Jl. Meranti, Kampus IPB Dramaga Bogor.
jaharuddin@apps.ipb.ac.id*, siswandi@apps.ipb.ac.id. *corresponding author

Abstrak

Dalam artikel ini, metode analisis homotopi digunakan untuk menyelesaikan suatu model Lotka-Volterra dari dua spesies yang bersaing. Dalam hal ini akan ditentukan suatu penyelesaian berupa semi-analitik dari model tersebut. Metodologi penelitian yang dilakukan diawali dengan mendefinisikan suatu operator linear berdasarkan model Lotka-Volterra yang ditinjau, kemudian mengonstruksi suatu persamaan deformasi. Berdasarkan persamaan deformasi ini diperoleh suatu hampiran penyelesaian. Penyelesaian hampiran dari model yang dikaji menunjukkan galat yang relatif kecil. Dalam artikel ini juga diberikan simulasi bahwa jika tingkat intrinsik spesies satu mengalami peningkatan dari 8% hingga 50%, tetapi tingkat intrinsik spesies dua dibuat tetap, maka hasil simulasi menunjukkan bahwa jumlah populasi spesies satu mengalami peningkatan, sedangkan jumlah spesies dua mengalami penurunan.

Kata kunci: metode analisis homotopi, model Lotka-Volterra, persamaan deformasi.

1. Pendahuluan

Model matematika sering digunakan untuk menjelaskan hubungan antara makhluk hidup dan lingkungannya, seperti interaksi antarspesies yang berbeda. Berdasarkan model matematika, dapat diketahui interaksi mangsa-pemangsa, interaksi persaingan atau kompetisi, dan interaksi mutualisme atau simbiosis. Salah satu persamaan matematika yang dapat menjelaskan interaksi antarspesies yang berupa interaksi mangsa-pemangsa adalah persamaan Lotka-Volterra. Persamaan ini dapat menjelaskan perilaku untuk setiap populasi, di mana untuk setiap populasi ada yang meningkat (melahirkan) dan ada yang menurun (punah) [7]. Selain itu, persamaan ini dapat pula menggambarkan fenomena antara mangsa dan pemangsa yang terkait dengan kelestarian ekosistem. Karena tanpa mangsa, pemangsa tidak dapat bertahan hidup karena tidak ada sumber makanan. Sebaliknya pemangsa bertindak sebagai kontrol

untuk populasi mangsa yang ada. Model Lotka-Volterra juga dapat menjelaskan interaksi taklinear sederhana dalam bidang fisika [11], kimia [12], dan biologi [14].

Model Lotka-Volterra merupakan sistem persamaan diferensial biasa yang bentuknya taklinear sehingga model tersebut sulit diselesaikan secara eksak, dikarenakan faktor taklinear yang sangat kuat. Penyelesaian akurat dari model persamaan Lotka-Volterra ini sangatlah sulit bilamana jumlah spesies yang berinteraksi banyak [13]. Salah satu teknik yang paling populer saat ini untuk menyelesaikan masalah taklinear adalah metode analisis homotopi yang merupakan gabungan dari metode perturbasi dan konsep homotopi yang digunakan dalam topologi. Metode analisis homotopi pertama kali diusulkan oleh Liao [8], kemudian dikembangkan oleh He [6] melalui metode perturbasi homotopi yang saat ini dipahami dengan baik. Berbeda dengan metode perturbasi, metode analisis homotopi tidak memerlukan parameter gangguan yang kecil dalam persamaannya. Dalam metode ini, homotopi dibangun dengan parameter *embedding* $q \in [0,1]$, sehingga masalah taklinear diubah menjadi masalah linear tanpa menggunakan teknik perturbasi [9]. Selain itu, metode ini menyediakan cara sederhana untuk mengontrol dan menyesuaikan daerah kekonvergenan dari deret penyelesaian dengan menggunakan parameter tersebut.

Dalam artikel ini dibahas penyelesaian model Lotka-Volterra dua spesies menggunakan metode analisis homotopi. Sebelum menyelesaikan masalah Lotka-Volterra dua spesies, metode analisis homotopi telah banyak digunakan peneliti lain untuk menyelesaikan masalah taklinear dalam bidang kimia, biologi dan lainnya. Abbasbandy (2006)[1] menggunakan metode analisis homotopi untuk menyelesaikan persamaan taklinear yang timbul dalam perpindahan panas. Boulet *et al* (2008) [3] menggunakan metode analisis homotopi untuk menyelesaikan masalah graf berhingga. Ganji (2006) [5] menggunakan metode analisis homotopi untuk menyelesaikan persamaan taklinear dari radiasi panas dan persamaan konduksi sirip. Mirzaee *et al* (2014) [10] menggunakan metode analisis homotopi untuk menyelesaikan persamaan integral fuzzy Abel linear dan taklinear.

2. Analisis Metode

Pada bagian ini dibahas penggunaan metode analisis homotopi untuk menyelesaikan model Lotka-Volterra dua spesies. Model ini merepresentasikan hubungan antara mangsa (*prey*) dan pemangsa (*predator*), di mana tiap pemangsa akan bersaing dengan individu lain yang sejenis untuk memperoleh mangsanya guna mempertahankan hidupnya. Misalnya dua spesies ikan yang tidak saling memangsa satu sama lain tetapi bersaing satu sama lain untuk mendapatkan kebutuhan makanan untuk bertahan hidup. Setiap spesies dalam lokasi yang sama, tumbuh menurut hukum logistik. Model Lotka-Volterra yang dikaji dalam artikel ini dinyatakan dalam bentuk berikut:

$$\begin{aligned} \frac{dS_1}{dt} &= S_1(\beta_1 + \alpha_{11}S_1 + \alpha_{12}S_2), \\ \frac{dS_2}{dt} &= S_2(\beta_2 + \alpha_{21}S_1 + \alpha_{22}S_2) \end{aligned} \tag{1}$$

dengan $S_1(t)$ dan $S_2(t)$ masing-masing menyatakan jumlah populasi pada saat t untuk spesies satu dan spesies dua. Keterangan mengenai parameter koefisien dari model persamaan (1) diberikan dalam Tabel 1.

Tabel 1. Deskripsi parameter model persamaan (1)

Paramater	Deskripsi
α_{11}	koefisien interaksi intra-spesifik antara anggota spesies satu
α_{12}	koefisien interaksi antara spesies satu dan dua yang mengakibatkan perubahan jumlah populasi spesies satu
α_{21}	koefisien interaksi antara spesies satu dan dua yang mengakibatkan perubahan jumlah populasi spesies dua
α_{22}	koefisien interaksi intra-spesifik antara anggota spesies dua
β_1	tingkat intrinsik spesies satu
β_2	tingkat intrinsik spesies dua

Dalam metode ini, diawali dengan memperkenalkan operator linear berdasarkan model persamaan (1) sebagai berikut:

$$\begin{aligned} L_1[S_1(t; q)] &= \frac{dS_1(t; q)}{dt} \\ L_2[S_2(t; q)] &= \frac{dS_2(t; q)}{dt} \end{aligned} \quad (2)$$

dengan $q \in [0, 1]$ adalah paramater *embedding*. Kemudian dari persamaan (1) didefinisikan operator taklinear A_1 dan A_2 sebagai berikut:

$$\begin{aligned} A_1[S_1(t; q), S_2(t; q)] &= \frac{dS_1}{dt} - S_1(\beta_1 + \alpha_{11}S_1 + \alpha_{12}S_2) \\ A_2[S_1(t; q), S_2(t; q)] &= \frac{dS_2}{dt} - S_2(\beta_2 + \alpha_{21}S_1 + \alpha_{22}S_2). \end{aligned} \quad (3)$$

Misalkan h_1, h_2 adalah paramater bantu tidak nol dan H_1, H_2 adalah fungsi bantu, didefinisikan persamaan deformasi orde-nol sebagai berikut:

$$\begin{aligned} (1 - q)L_1(S_1(t, q) - S_{1,0}(t)) &= qh_1H_1(t)A_1[S_1(t, q), S_2(t, q)] \\ (1 - q)L_2(S_2(t, q) - S_{2,0}(t)) &= qh_2H_2(t)A_2[S_1(t, q), S_2(t, q)] \end{aligned} \quad (4)$$

dengan kondisi awal $S_1(0; q) = S_{1,0}$, dan $S_2(0; q) = S_{2,0}$.

Untuk $q = 0$, diperoleh:

$$S_1(t; 0) = S_{1,0}(t), \quad S_2(t; 0) = S_{2,0}(t), \quad (5)$$

dan ketika $q = 1$ diperoleh:

$$A_1[S_1(t, 1), S_2(t, 1)] = 0, \quad A_2[S_1(t, 1), S_2(t, 1)] = 0,$$

sehingga

$$S_1(t) = S_1(t; 1), \quad S_2(t) = S_2(t; 1), \quad (6)$$

yang merupakan penyelesaian eksak dari model persamaan (1). Terlihat bahwa ketika q meningkat dari 0 menjadi 1, maka fungsi $S_1(t; q)$ dan $S_2(t; q)$ bervariasi dari $S_{1,0}(t)$ dan $S_{2,0}(t)$ ke masing-masing $S_1(t)$ dan $S_2(t)$.

Dengan menggunakan deret Taylor dari $S_1(t; q)$ dan $S_2(t; q)$ di sekitar $q = 0$, maka diperoleh:

$$\begin{aligned} S_1(t; q) &= S_1(t; 0) + \sum_{n=1}^{\infty} S_{1,n}(t)q^n \\ S_2(t; q) &= S_2(t; 0) + \sum_{n=1}^{\infty} S_{2,n}(t)q^n \end{aligned} \quad (7)$$

dengan

$$\begin{aligned} S_{1,n}(t) &= \frac{1}{n!} \frac{\partial^n S_1(t; q)}{\partial q^n} \Big|_{q=0} \\ S_{2,n}(t) &= \frac{1}{n!} \frac{\partial^n S_2(t; q)}{\partial q^n} \Big|_{q=0}. \end{aligned}$$

Karena

$$\begin{aligned} S_1(t; 0) &= S_{1,0}(t), & S_2(t; 0) &= S_{2,0}(t) \\ S_1(t; 1) &= S_1(t), & S_2(t; 1) &= S_2(t) \end{aligned}$$

maka untuk $q = 1$ diperoleh deret penyelesaian dari model persamaan (1) sebagai berikut:

$$\begin{aligned} S_1(t) &= S_{1,0}(t) + \sum_{n=1}^{\infty} S_{1,n}(t) \\ S_2(t) &= S_{2,0}(t) + \sum_{n=1}^{\infty} S_{2,n}(t) \end{aligned} \quad (8)$$

Paramater h_1 dan h_2 dipilih sedemikian sehingga persamaan (8) konvergen untuk $q = 1$. Jika persamaan (4) diturunkan sebanyak n kali terhadap q dan dievaluasi di $q = 0$, kemudian dibagi dengan $n!$, maka diperoleh persamaan deformasi orde- n sebagai berikut:

$$\begin{aligned} L_1 \left(S_{1,n}(t) - \chi_n S_{1,n-1}(t) \right) &= h_1 H_1(t) B_{1,n} [\vec{S}_{1,n-1}(t)] \\ L_2 \left(S_{2,n}(t) - \chi_n S_{2,n-1}(t) \right) &= h_2 H_2(t) B_{2,n} [\vec{S}_{2,n-1}(t)] \end{aligned} \quad (9)$$

dengan kondisi awal $S_{1,n}(0) = S_{1,0}$, $S_{2,n}(0) = S_{2,0}$, $\chi_n = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ 0, & n \text{ lainnya} \end{cases}$

$$\begin{aligned} B_{i,n} [\vec{S}_{i,n-1}(t)] &= \frac{1}{(n-1)!} \frac{\partial^{n-1} A_i(t; q)}{\partial q^{n-1}} \Big|_{q=0}, \\ \vec{S}_{i,n-1}(t) &= (S_{i,1}(t), S_{i,2}(t), S_{i,3}(t), \dots, S_{i,n}(t)), i = 1, 2. \end{aligned}$$

Dengan menggunakan persamaan (3) diperoleh

$$B_{1,n} = \left(\frac{dS_{1,n-1}(t)}{dt} - S_{1,n-1}(t)\beta_1 - \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{11} S_{1,k}(t) S_{1,n-1-k}(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{12} S_{1,k}(t) S_{2,n-1-k}(t) \right), \quad (10)$$

dan

$$B_{2,n} = \left(\frac{dS_{2,n-1}(t)}{dt} - S_{2,n-1}(t)\beta_2 - \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{21} S_{2,k}(t) S_{1,n-1-k}(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{22} S_{2,k}(t) S_{2,n-1-k}(t) \right). \quad (11)$$

Jika dipilih $h_1 = -1$ dan $H_1(t) = 1$, maka berdasarkan persamaan deformasi orde- n pada persamaan (9) untuk $n \geq 1$ diperoleh:

$$S_{1,n}(t) = \chi_n S_{1,n-1}(t) - \int_0^t B_{1,n}(t) dt \quad (12)$$

dan

$$S_{2,n}(t) = \chi_n S_{2,n-1}(t) - \int_0^t B_{2,n}(t) dt. \quad (13)$$

dengan $B_{1,n}(t)$ dan $B_{2,n}(t)$ masing-masing diberikan pada persamaan (10) dan (11).

Dengan demikian penyelesaian model persamaan (1) dengan metode analisis homotopi dapat dinyatakan oleh deret berikut:

$$\begin{aligned} S_1(t) &= S_{1,0} + S_{1,1}(t) + S_{1,2}(t) + S_{1,3}(t) + \dots \\ S_2(t) &= S_{2,0} + S_{2,1}(t) + S_{2,2}(t) + S_{2,3}(t) + \dots \end{aligned} \quad (14)$$

dengan $S_{1,n}(t)$ dan $S_{2,n}(t)$ masing-masing diberikan oleh persamaan (12) dan (13) yang diperoleh secara rekursif dengan menggunakan integral biasa. Pada bagian selanjutnya akan diberikan suatu ilustrasi pemakaian dari metode ini.

3. Hasil dan Pembahasan

3.1. Aplikasi Metode

Misalkan diberikan nilai paramater-paramater dari model persamaan (1) yang bersumber pada rujukan [2]. Koefisien interaksi kedua spesies adalah sebagai berikut: $\alpha_{11} = -0.0018$, $\alpha_{12} = -0.0016$, $\alpha_{21} = -0.0013$, $\alpha_{22} = -0.0014$, sedangkan tingkat intrinsik setiap spesies adalah $\beta_1 = 0.15$ dan $\beta_2 = 0.08$. Misalkan pula bahwa jumlah populasi spesies satu dan spesies dua saat $t = 0$ masing-masing adalah 4 dan 10 dalam

satuan ekor. Data tersebut dapat ditulis dalam notasi sebagai berikut: $S_{1,0} = 4$, dan $S_{2,0} = 10$.

Selanjutnya akan digunakan hasil-hasil yang diperoleh pada bagian sebelumnya untuk memperoleh penyelesaian hampiran dari model persamaan (1). Keakuratan penyelesaian hampiran yang diperoleh akan dibandingkan dengan penyelesaian eksak dari model persamaan (1). Berdasarkan metode faktor pengintegralan dalam rujukan [4] diperoleh penyelesaian eksak $S_1(t)$ dan $S_2(t)$ dari model persamaan (1) sebagai berikut:

$$S_{1EKSASAK}(t) = \frac{74.44 \times (2.718)^{0.134t}}{17.61 + (2.718)^{0.134t}}$$

$$S_{2EKSASAK}(t) = \frac{53.43 \times (2.718)^{0.0748t}}{4.34 + (2.718)^{0.0748t}}.$$

Penyelesaian hampiran dari model persamaan (1), yaitu $S_1(t)$ dan $S_2(t)$ yang diberikan dalam persamaan (14) hingga orde ke-3 dan ke-4 adalah sebagai berikut:

Penyelesaian hampiran hingga orde ke-3:

$$S_1(t) = 4 + 0.5072t + 0.028385t^2 + 0.0007894764t^3$$

$$S_2(t) = 10 + 0.608t + 0.010930t^2 + 0.0000258627t^3$$

Penyelesaian hampiran hingga orde ke-4:

$$S_1(t) = 4 + 0.5072t + 0.028385t^2 + 0.0007894764t^3 + 0.00000194120t^4$$

$$S_2(t) = 10 + 0.608t + 0.010930t^2 + 0.0000258627t^3 + 0.00001765435t^4$$

Perbandingan antara penyelesaian eksak dan penyelesaian dengan metode analisis homotopi diberikan pada Tabel 2. Misalkan S_{1MH} dan S_{2MH} masing-masing merupakan notasi untuk hampiran penyelesaian dengan menggunakan metode analisis homotopi untuk spesies satu dan spesies dua. Dalam Tabel 2 ditunjukkan selisih antara hampiran penyelesaian dengan homotopi S_{1MH} , dan S_{2MH} serta dengan penyelesaian eksak.

Tabel 2. Galat metode analisis homotopi orde ke sepuluh

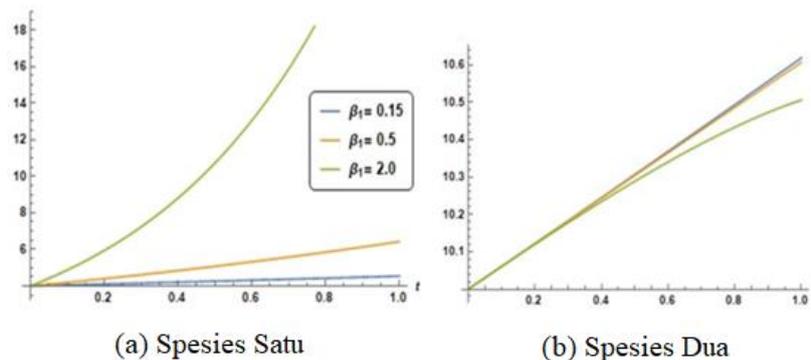
t	$ S_{1MH} - S_{1EKSASAK} $	$ S_{2MH} - S_{2EKSASAK} $
0,1	1.1840×10^{-3}	1.2675×10^{-2}
0,2	1.1059×10^{-3}	1.4632×10^{-2}
0,3	9.8503×10^{-4}	1.6553×10^{-2}
0,4	8.1964×10^{-4}	1.8435×10^{-2}
0,5	6.0802×10^{-4}	2.0277×10^{-2}

t	$ S_{1MH} - S_{1EKSAS} $	$ S_{2MH} - S_{2EKSAS} $
0,6	3.4839×10^{-4}	2.2078×10^{-2}
0,7	3.8942×10^{-4}	2.3836×10^{-2}
0,8	3.222×10^{-4}	2.5550×10^{-2}
0,9	7.3693×10^{-4}	2.7216×10^{-2}
1	122071×10^{-3}	2.8835×10^{-2}

Berdasarkan Tabel 2, rata rata galat yang dihasilkan oleh $S_1(t)$ sebesar 7.3563×10^{-4} dan $S_2(t)$ sebesar 2.1009×10^{-2} . Galat yang kecil ini menunjukkan bahwa model persamaan (1) yang diberikan dapat diselesaikan dengan menggunakan metode analisis homotopi dengan hampiran yang baik dan langkah penyelesaian yang efektif dan efisien.

3.2. Dinamika Populasi

Pada bagian ini akan dibahas dinamika dari populasi spesies satu dan spesies dua untuk perubahan nilai dari intrinsik (kemampuan adaptasi dengan lingkungan hidup) kedua spesies tersebut. Gambar 1 dan Gambar 2 berikut diperoleh berdasarkan grafik dari fungsi pada persamaan (14) yang merupakan penyelesaian hampiran dengan metode analisis homotopi hingga orde kesepuluh. Gambar 1 menunjukkan perubahan jumlah populasi spesies satu dan spesies dua bilamana tingkat intrinsik dari populasi spesies satu meningkat, sedangkan tingkat intrinsik dari populasi spesies dua tetap, yaitu $\beta_2 = 0.08$.



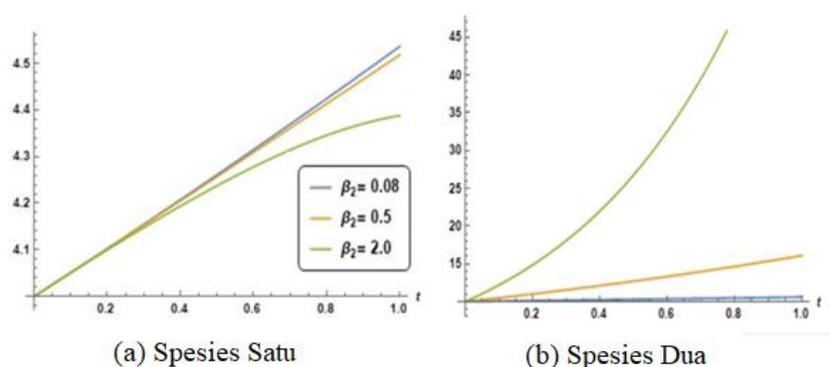
Gambar 1. Perubahan populasi spesies satu dan spesies dua saat β_1 meningkat

Berdasarkan Gambar 1(a) diperoleh bahwa semakin besar nilai β_1 , maka jumlah populasi spesies satu S_1 akan semakin meningkat. Ketika $\beta_1 = 0.15$ dan $\beta_1 = 0.5$, jumlah populasi spesies satu meningkat sangat lambat tetapi pada saat $\beta_1 = 2.0$ terlihat bahwa jumlah populasinya meningkat sangat cepat pada waktu $t \in [0,1]$. Pada Gambar 1(b)

diperoleh bahwa jumlah populasi spesies dua S_2 menurun dan semakin besar perubahan nilai β_1 , maka jumlah populasi spesies dua akan semakin menurun.

Gambar 2 menunjukkan perubahan jumlah populasi spesies satu dan spesies dua bilamana tingkat intrinsik dari populasi spesies dua β_2 meningkat, sedangkan tingkat intrinsik dari populasi spesies satu tetap, yaitu $\beta_1 = 0.15$.

Gambar 2(a) menunjukkan bahwa jumlah populasi spesies satu S_1 semakin menurun dengan peningkatan nilai β_2 , sedangkan pada Gambar 2(b) diperoleh bahwa jumlah populasi spesies dua meningkat secara lambat ketika nilai $\beta_2 = 0.08$ dan $\beta_2 = 0.5$. Perubahan jumlah populasi spesies dua tersebut akan meningkat dengan cepat ketika nilai $\beta_2 = 2.0$.



Gambar 2. Perubahan populasi spesies satu dan spesies dua saat β_2 meningkat

Berdasarkan grafik pada Gambar 1 dan Gambar 2 di atas, perubahan nilai β_1 maupun β_2 sangat mempengaruhi jumlah populasi untuk setiap spesies. Dalam hal ini, semakin besar perubahan nilai intrinsiknya, maka akan mengakibatkan perubahan jumlah populasi untuk setiap spesies makin besar.

4. Kesimpulan

Model Lotka-Volterra dua spesies merupakan model persamaan diferensial taklinear, padahal secara umum model persamaan taklinear sangat sulit diselesaikan secara analitik (eksak), karena belum adanya metode-metode analitik untuk menentukan penyelesaian suatu masalah taklinear. Salah satu metode hampiran berupa semi-analitik yang diusulkan untuk menyelesaikan model Lotka-Volterra adalah metode analisis homotopi. Penggunaan metode analisis homotopi untuk menyelesaikan masalah Lotka-Volterra dua spesies ini menunjukkan efisiensi dan sederhana, karena hanya melibatkan pengintegralan biasa. Selain itu, diperoleh pula penyelesaian hampiran dari model Lotka-Volterra ini memberikan galat yang kecil. Hal ini menunjukkan bahwa metode analisis homotopi merupakan metode hampiran yang sangat cocok untuk menyelesaikan masalah Lotka-Volterra.

Jumlah populasi spesies satu dan spesies dua pada masalah Lotka-Volterra tergantung pada nilai intrinsik dari kedua spesies tersebut. Dalam simulasi, nilai intrinsik dimisalkan bernilai positif atau dengan kata lain kedua spesies tersebut memiliki kemampuan adaptasi terhadap lingkungannya. Dalam hal ini, untuk nilai intrinsik spesies satu ditingkatkan dengan nilai intrinsik spesies dua tetap, maka diperoleh bahwa jumlah populasi spesies satu juga meningkat secara signifikan. Hal yang sama bilamana nilai intrinsik spesies dua ditingkatkan dengan nilai intrinsik spesies satu tetap, maka menghasilkan peningkatan signifikan pada jumlah populasi spesies dua. Selain itu, dalam simulasi nilai koefisien interaksi kedua spesies dimisalkan bernilai negatif sehingga diperoleh bahwa peningkatan jumlah populasi spesies satu akan merugikan spesies dua sehingga jumlah populasinya pun menurun.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Abbasbandy S. 2006. The Application of homotopy analysis method to nonlinear equations arising in heat transfer. *Physics Letters A*. 360(2006):109-113.
- [2] Bakare EA, Chakraverty S, Abolarin OE. 2018. Qualitative analysis and homotopy based solution of two species Lotka-Volterra. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*. 199(2):261-280. [diakses 2020 Nov 5]. doi: 10.12732/ijpam.v119i2.1
- [3] Boulet R, Fieux E, Jouve B. 2008. S-homotopy for finite graphs. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*. 31(2008):123-127.
- [4] Edwin J. Purcell, Dale Varberg, Steven E. Rigdon. 2004. *Kalkulus edisi kedelapan*. Jakarta (ID): Erlangga.
- [5] Ganji DD. 2006. The application of He's homotopy perturbation method to nonlinear equations arising in heat transfer. *Physics Letters*. 355(2006):337-341.
- [6] He JH. 1998. An approximate solution technique depending on an artificial parameter. *a special example, Commun. Nonlinear Sci. Numer.* 3(1998):92-96.
- [7] Hofbauer J, Sigmund K. 1988. *The theory of evolution and dynamical systems*. London (UK): Cambridge University Press.
- [8] Liao SJ. 1992. The proposed homotopy analysis technique for the solution of nonlinear problems [tesis]. Shanghai (CN): Jiao Tong University.
- [9] Liao SJ. 2003. *Beyond perturbation: introduction to homotopy analysis method*. Boca Raton (US): CRC Press.
- [10] Mirzaee F, Yari MK, Paripour M. 2014. Solving linear and nonlinear Abel fuzzy integral equations by homotopy analysis method. *Journal of Taibah University for Science*.
- [11] Noonburg. 1989. A neural network modeled by an adaptive Lotka-Volterra system. *SIAM Journal on Applied Mathematics*. 49(6):1779-1792.
- [12] Noszticzius Z, Noszticzius E, Schelly ZA. 1983. On the use of ion-selective electrodes for monitoring oscillating reactions. 2. potential response of bromide- and iodide-selective electrodes in slow corrosive processes. disproportionation of bromous and iodous acids. A Lotka-Volterra model for the halate driven oscillators. *Journal of Physical Chemistry*. 87(3):510-524.
- [13] Rostamy D, Zabihi F, Karimi K. 2011. The application of homotopy analysis method for solving the prey and predator problem. *Applied Mathematical Sciences*. 5(13):639-650.
- [14] Tainaka KI. 1989. Stationary pattern of vortices or strings in biological systems: lattice version of the Lotka-Volterra model. *Physical Review Letters*. 63(24):2688-2691.