

# SIMULASI SISTEM *BONUS-MALUS* PADA ASURANSI KENDARAAN BERMOTOR BERDASARKAN JENIS KECELAKAAN DAN TINGKAT KEPARAHAN

AWATIF<sup>1</sup>, I G. P. PURNABA<sup>2</sup>, I W. MANGKU<sup>3</sup>

## Abstrak

Penelitian ini membahas asuransi kendaraan bermotor di mana penentuan harga premi risikonya berdasarkan data riwayat kecelakaan di masa lalu (*experience rating*) dan disebut dengan sistem *Bonus-Malus*. Pada sistem *Bonus-Malus*, pemegang polis yang telah mengajukan satu atau lebih klaim akan dikenakan kenaikan premi (*Malus*), sedangkan yang tidak mengajukan klaim akan diberikan penghargaan berupa penurunan premi (*Bonus*) di periode pembayaran premi berikutnya. Simulasi sistem *Bonus-Malus* yang dibahas ada tiga sistem. Untuk semua sistem, setiap tahun yang tidak ada klaim dihargai dengan turun satu tingkat. Sistem *Bonus-Malus* pertama menghukum setiap klaim kerusakan barang naik dua tingkat dan klaim cedera tubuh naik empat tingkat ( $-1/+2/+4$ ), sistem kedua menghukum setiap klaim (kerusakan barang atau cedera tubuh) naik dua tingkat ( $-1/+2/+2$ ) dan sistem ketiga menghukum setiap klaim (kerusakan barang atau cedera tubuh) naik tiga tingkat ( $-1/+3/+3$ ). Dari ketiga sistem diperoleh proporsi banyaknya nasabah dan besar premi relatif di setiap kelas premi. Kelas premi pertama (*state 0*) merupakan kelas premi paling murah dan kelas premi terakhir (*state 8*) merupakan kelas premi paling mahal. Hasil dari simulasi diperoleh proporsi nasabah di kelas premi paling murah paling banyak di sistem kedua sebesar 54.70% dengan besar premi relatif sebesar 85.76% dan paling sedikit di sistem ketiga sebesar 42.44% dengan besar premi relatif sebesar 80.81%. Proporsi nasabah di kelas premi paling mahal paling banyak di sistem ketiga sebesar 6.45% dengan besar premi relatif sebesar 132.85% dan paling sedikit di sistem kedua sebesar 2.60% dengan besar premi relatif sebesar 139.84%.

**Kata kunci:** jenis dan tingkat keparahan kecelakaan, premi risiko, sistem *Bonus-Malus*.

## 1 PENDAHULUAN

Asuransi kendaraan bermotor menarik untuk dikaji karena kendaraan bermotor merupakan barang investasi untuk kehidupan sehingga banyak masyarakat menggunakan perusahaan asuransi untuk mengalihkan risiko yang

---

<sup>1</sup> Mahasiswa S2 Program Studi Matematika Terapan, Sekolah Pascasarjana IPB, Jalan Meranti Kampus IPB Dramaga Bogor, 16680. E-mail: [awatif\\_libra@yahoo.co.id](mailto:awatif_libra@yahoo.co.id)

<sup>2</sup> Departemen Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Jalan Meranti Kampus IPB Dramaga Bogor, 16680. E-mail : [puerna@gmail.com](mailto:puerna@gmail.com)

<sup>3</sup> Departemen Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Jalan Meranti Kampus IPB Dramaga Bogor, 16680. E-mail: [wayan.mangku@gmail.com](mailto:wayan.mangku@gmail.com)

terjadi pada kendaraan bermotor mereka dari kejadian yang tidak diinginkan. Ciri khusus dari asuransi kendaraan bermotor adalah premi yang dikenakan terhadap pemegang polis bergantung pada kriteria *prior*, yaitu berdasarkan data yang diketahui asuransi di masa lalu (*experience rating*). Sistem *experience rating* seperti ini disebut juga dengan sistem *Bonus-Malus* (BMS).

Lemaire [5] menyatakan bahwa semua sistem *Bonus-Malus* yang ada di dunia ini (kecuali di Korea) menentukan hukuman didasarkan atas banyaknya klaim yang dilaporkan tanpa melihat besaran dari masing-masing klaim. Selanjutnya, Lemaire [5] mengaplikasikan model yang diajukan oleh Picard [8] untuk data *Bonus-Malus* di Belgia yang memungkinkan perusahaan asuransi membagi klaim dalam dua kategori, yaitu klaim kecil dan klaim besar. Lemaire [5] juga membedakan kecelakaan menjadi dua bagian yaitu kecelakaan yang menyebabkan kerusakan barang/properti dan kecelakaan yang menyebabkan kerusakan tubuh. Lemaire [5] menggunakan model campuran Poisson-Gamma dan mengasumsikan persentase klaim dengan cedera tubuh dari pemegang polis memiliki distribusi Beta.

Di Amerika, Pitrebois [10] menggunakan ketentuan bahwa premi tahun berikutnya tidak hanya dilihat dari frekuensi kecelakaan tetapi juga catatan atau pengalaman dia mengemudi. Jadi penentuan premi dilihat dari riwayat kecelakaannya selama ini ditambah faktor-faktor lain. Jika tidak mengalami kecelakaan selama setahun maka turun satu tingkat dengan pembayaran premi yang lebih murah (mendapat *Bonus*) dan jika mengalami kecelakaan akan naik tingkatnya dengan pembayaran premi yang lebih mahal (mendapat *Malus*) tergantung jenis kecelakaannya. Pitrebois [10] menggunakan sistem *Bonus-Malus* yang menerapkan rantai Markov, di mana perubahan *state*-nya menggunakan proses Markov waktu diskret. Harga premi untuk setiap tingkat dihitung dengan prinsip akurasi maksimum [7].

Seperti yang telah diuraikan di atas, *Bonus-Malus* sudah banyak diaplikasikan dengan berbagai sistem dan faktor-faktor risiko yang ada. Modifikasi-modifikasi yang dapat dilakukan di berbagai negara, tergantung dari situasi dan kondisi, serta kebijakan pemerintah setempat mengenai asuransi. Jika di suatu negara pemerintah menetapkan kebebasan untuk para pengusaha jasa asuransi dalam menentukan tarif asuransi, maka *Bonus-Malus* sendiri dapat dirancang sedemikian sehingga dapat melihat dari sisi perusahaan atau pemegang polisnya. Jadi sistem *Bonus-Malus* bisa saja disesuaikan dengan berbagai macam situasi dan kondisi. Hal di atas menunjukkan bahwa fleksibilitas sebuah sistem *Bonus-Malus* sudah diakui oleh banyak negara [6].

Tujuan penelitian ini adalah menentukan besar premi dari tiga simulasi sistem *Bonus-Malus* dengan jenis kecelakaan dan tingkat keparahan yang dibedakan atas tiga kelompok pada asuransi kendaraan bermotor.

## 2 TINJAUAN PUSTAKA

### 2.1 Sistem *Bonus-Malus*

Setiap perusahaan asuransi menerapkan sistem penetapan premi yang berbeda-beda. Salah satu sistem yang ditawarkan oleh perusahaan asuransi adalah sistem *Bonus-Malus*. Sistem *Bonus-Malus* merupakan salah satu sistem yang digunakan dalam asuransi kendaraan bermotor. Sistem ini memperkenalkan pembagian kelas premi yang dipengaruhi oleh banyaknya klaim yang diajukan oleh pemegang polis tiap tahunnya.

Denuit *et al.* [3] menyatakan bahwa pada sistem *Bonus-Malus*, pemegang polis yang telah mengajukan satu atau lebih klaim akan dikenakan kenaikan premi disebut *Malus* sedangkan bagi pemegang polis yang tidak mengajukan klaim akan diberikan penghargaan berupa penurunan premi disebut *Bonus* di periode pembayaran premi berikutnya. Sistem *Bonus-Malus* (BMS) disebut juga dengan sistem *experience rating* atau berdasarkan data asuransi di masa lalu. Dengan demikian sistem *Bonus-Malus* diharapkan akan mendorong para pemegang polis untuk lebih berhati-hati pada saat berkendara.

Sistem *Bonus-Malus* dikatakan optimal jika seimbang secara finansial bagi perusahaan asuransi, di mana total jumlah bonus sama dengan total jumlah malus dan adil bagi para pemegang polis yaitu setiap pemegang polis membayar premi yang proporsional dengan risiko yang terjadi.

### 2.2 Model Markov

Perpindahan dari satu *state* ke *state* lain dengan sistem *Bonus-Malus* dapat dimodelkan dengan rantai Markov, di mana perubahan *state* menggunakan proses Markov waktu diskret. Metode ini banyak digunakan oleh beberapa peneliti yaitu Norberg [7], Gilde dan Sundt [4], Denuit dan Dhaene [2], Centeno dan Silva [1] dan Pitrebois *et al.* [9].

Suatu proses stokastik  $\{Z_t; t = 0, 1, 2, \dots, n\}$  disebut rantai Markov waktu diskret [11] jika:

$$P\{Z_{n+1} = i_{n+1} | Z_0 = i_0, Z_1 = i_1, \dots, Z_n = i_n\} = P\{Z_{n+1} = i_{n+1} | Z_n = i_n\}$$

untuk  $t = 0, 1, 2, \dots, n$  untuk semua kemungkinan nilai dari *state*  $i_0, i_1, \dots, i_{n+1}$ .

Diasumsikan skala dari rantai Markov memiliki  $(s + 1)$  tingkat, misalnya dari *state* 0 sampai *state*  $s$ , perpindahannya dari satu *state* ke *state* yang lain mengikuti rantai Markov. Rantai Markov terdefinisi oleh matriks peluang transisinya. Matriks peluang transisi adalah suatu matriks yang memuat semua informasi yang mengatur perpindahan sistem dari suatu *state* ke *state* lainnya. Semua ini didasarkan atas pengalaman-pengalaman yang dialami masa sebelumnya.

Misalkan  $p_{\ell_1 \ell_2}(\vartheta; q)$  merupakan peluang berpindah dari tingkat  $\ell_1$  ke tingkat  $\ell_2$  untuk pemegang polis dengan rata-rata banyaknya klaim tahunan  $\vartheta$  dan

vektor peluang kejadiannya  $q = (q_1, \dots, q_\tau)^t$ ; di mana  $q_j$  adalah peluang klaim jenis  $j$ .

Misalkan  $M = M(\vartheta; q)$  di mana  $M(\vartheta; q) = \{p_{\ell_1 \ell_2}(\vartheta; q)\}$  adalah matriks transisi satu langkah dengan  $\ell_1, \ell_2 = 0, 1, 2, \dots, s$ , yang berukuran  $(s + 1) \times (s + 1)$ . Unsur-unsur dari matriks tersebut menunjukkan besarnya peluang perpindahan sistem dari satu *state* ke *state* lainnya.

$$M = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & \dots & s \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ s \end{matrix} & \begin{bmatrix} P_{00}^{(1)} & P_{01}^{(1)} & P_{02}^{(1)} & P_{03}^{(1)} & \dots & P_{0s}^{(1)} \\ P_{10}^{(1)} & P_{11}^{(1)} & P_{12}^{(1)} & P_{13}^{(1)} & \dots & P_{1s}^{(1)} \\ P_{20}^{(1)} & P_{21}^{(1)} & P_{22}^{(1)} & P_{23}^{(1)} & \dots & P_{2s}^{(1)} \\ P_{30}^{(1)} & P_{31}^{(1)} & P_{32}^{(1)} & P_{33}^{(1)} & \dots & P_{3s}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{s0}^{(1)} & P_{s1}^{(1)} & P_{s2}^{(1)} & P_{s3}^{(1)} & \dots & P_{ss}^{(1)} \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

Matriks di atas disebut sebagai matriks peluang transisi dari suatu rantai Markov yang stasioner. Akibat sifat peluang, matriks tersebut mempunyai sifat sebagai berikut:

1.  $P_{ij} \geq 0$ , untuk  $i, j = 0, 1, 2, \dots, s$
2.  $\sum_j P_{ij} = 1$ , untuk  $i = 0, 1, 2, \dots, s$ .

Matriks peluang transisi  $M$  yang terkait dengan sistem *Bonus-Malus* diasumsikan *ergodic*, yaitu ada bilangan bulat  $\xi_0 \geq 1$  sedemikian sehingga semua entri  $\{M\}^{\xi_0}$  positif. Akibatnya, rantai Markov yang menggambarkan lintasan pemegang polis dengan rata-rata frekuensi klaim  $\vartheta$ , vektor peluangnya  $q$  dan memiliki distribusi stasioner yaitu:

$$\pi(\vartheta; q) = (\pi_0(\vartheta; q), \pi_1(\vartheta; q), \dots, \pi_s(\vartheta; q))^t.$$

Kuantitas  $\pi_\ell(\vartheta; q)$  adalah peluang transisi stasioner atau proporsi banyaknya nasabah untuk pemegang polis dengan rata-rata banyak klaim  $\vartheta$  berada di tingkat  $\ell$ , yaitu:

$$\pi_\ell(\vartheta; q) = \lim_{v \rightarrow +\infty} p_{\ell_1 \ell_2}^{(v)}(\vartheta; q).$$

Matriks  $\pi_\ell(\vartheta; q)$  diperoleh dari matriks peluang transisi  $M$  satu langkah yang dipangkatkan  $\vartheta$  dengan  $\vartheta \rightarrow +\infty$ , di mana setiap kolom dari matriks peluang transisi  $M$  yang dipangkatkan  $\vartheta$  akan menghasilkan nilai yang sama untuk semua baris matriks.

Peluang transisi stasioner tersebut diperoleh dari formula Rolski *et al.* [12] sebagai berikut

$$\pi^t(\vartheta; q) = e^t(I - M + E)^{-1}$$

di mana  $e$  merupakan vektor kolom pertama terdiri dari  $(s + 1)$  kolom (konstanta),  $I$  merupakan matriks identitas yang berukuran  $(s + 1) \times (s + 1)$ ,  $M$

merupakan matriks transisi satu langkah yang elemennya  $(p_{\ell_1 \ell_2})$  serta berukuran  $(s + 1) \times (s + 1)$ ,  $E$  merupakan matriks yang semua nilainya 1 dan berukuran  $(s + 1) \times (s + 1)$ .

Misalkan  $L_{\vartheta; q}$  dengan indeks  $\{0, 1, 2, \dots, s\}$  yang bersesuaian dengan distribusi  $\pi(\vartheta; q)$  yaitu

$$P[L_{\vartheta; q} = \ell] = \pi_{\ell}(\vartheta; q), \quad \ell = 0, 1, \dots, s,$$

dengan

$$\pi_{\ell} = P[L = \ell] = \sum_k w_k (\sum_{i=1}^3 \pi_{\ell}(\lambda_k \theta_i; q_k) P[\Theta = \theta_i]), \quad (1)$$

di mana  $\pi_{\ell} = P[L = \ell]$  menyatakan persentase atau proporsi banyaknya nasabah untuk tingkat  $\ell$ .

### 2.3 Penentuan Besar Premi Relatif

Premi relatif merupakan solusi yang diperoleh dari meminimalkan rata-rata dari beda kuadrat antara premi relatif  $\Theta$  yang seharusnya dan premi relatif  $r_{\ell}$  yang berlaku pada pemegang polis [7]. Solusi minimumnya sebagai berikut

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(\Theta - r_L)^2] &= \sum_{\ell=0}^s \mathbb{E}[(\Theta - r_{\ell})^2 | L = \ell] P[L = \ell] \\ &= \sum_k w_k (\sum_{i=1}^3 (\sum_{\ell=0}^s (\theta_i - r_{\ell})^2 \pi_{\ell}(\lambda_k \theta_i; q_k) P[\Theta = \theta_i])). \end{aligned}$$

Berdasarkan Pitrebois *et al.* [9] bahwa besar premi relatif ( $r_{\ell}$ ) terhadap premi awal untuk tingkat  $\ell$  diperoleh solusinya sebagai berikut

$$r_{\ell} = \mathbb{E}[\Theta | L = \ell] = \frac{\sum_k w_k (\sum_{i=1}^3 \theta_i \pi_{\ell}(\lambda_k \theta_i; q_k) P[\Theta = \theta_i])}{\sum_k w_k (\sum_{i=1}^3 \pi_{\ell}(\lambda_k \theta_i; q_k) P[\Theta = \theta_i])}. \quad (2)$$

Pada saat kesetimbangan tercapai  $\mathbb{E}[r_L] = 1$ .

## 3 METODE

Pada penelitian ini, difokuskan menentukan teknik dalam pengelompokan nasabah asuransi kendaraan bermotor yang melibatkan banyaknya klaim dan besarnya kerugian dari setiap pemegang polis. Berikut langkah-langkah yang dilakukan pada saat penelitian:

1. Mengelompokkan nasabah asuransi kendaraan bermotor dengan sistem *Bonus-Malus* berdasarkan jenis kecelakaan.
2. Menyusun klasifikasi kelas risiko dengan beberapa simulasi sistem *Bonus-Malus* dan menentukan banyaknya *state*.
3. Menentukan besar premi dari beberapa simulasi sistem *Bonus-Malus* dengan jenis kecelakaan dan tingkat keparahan.

## 4 HASIL NUMERIK

### 4.1 Pengelompokan Nasabah Asuransi Kendaraan Bermotor dengan Sistem *Bonus-Malus* Berdasarkan Jenis Kecelakaan

Berdasarkan kriteria *prior* (tingkat risiko yang berasal dari klaim misalnya umur, jenis kelamin dari pengemudi, wilayah, jenis atau daya penggunaan kendaraan bermotor) dan *posterior* (berdasarkan banyaknya kecelakaan yang dialami oleh pemegang polis), pengelompokan nasabah asuransi kendaraan bermotor sistem *Bonus-Malus* dikembangkan menjadi dua puluh empat kelas risiko  $C_1, C_2, \dots, C_{24}$ . Pengelompokan ini bisa dilihat pada Tabel 1.

Tabel 1

Gambaran dari dua puluh empat kelas risiko dalam menyusun portofolio

| Kelas Risiko | Umur  | Jenis Kelamin | Wilayah   | Daya Kendaraan |
|--------------|-------|---------------|-----------|----------------|
| $C_1$        | 18-22 | Laki-laki     | Perkotaan | >66 kW         |
| $C_2$        | 18-22 | Laki-laki     | Pedesaan  | >66 kW         |
| $C_3$        | 18-22 | Laki-laki     | Perkotaan | <66 kW         |
| $C_4$        | 18-22 | Laki-laki     | Pedesaan  | <66 kW         |
| $C_5$        | 23-30 | Laki-laki     | Perkotaan | >66 kW         |
| $C_6$        | 23-30 | Laki-laki     | Pedesaan  | >66 kW         |
| $C_7$        | 23-30 | Laki-laki     | Perkotaan | <66 kW         |
| $C_8$        | 23-30 | Laki-laki     | Pedesaan  | <66 kW         |
| $C_9$        | >30   | Laki-laki     | Perkotaan | >66 kW         |
| $C_{10}$     | >30   | Laki-laki     | Pedesaan  | >66 kW         |
| $C_{11}$     | >30   | Laki-laki     | Perkotaan | <66 kW         |
| $C_{12}$     | >30   | Laki-laki     | Pedesaan  | <66 kW         |
| $C_{13}$     | 18-22 | Perempuan     | Perkotaan | >66 kW         |
| $C_{14}$     | 18-22 | Perempuan     | Pedesaan  | >66 kW         |
| $C_{15}$     | 18-22 | Perempuan     | Perkotaan | <66 kW         |
| $C_{16}$     | 18-22 | Perempuan     | Pedesaan  | <66 kW         |
| $C_{17}$     | 23-30 | Perempuan     | Perkotaan | >66 kW         |
| $C_{18}$     | 23-30 | perempuan     | Pedesaan  | >66 kW         |
| $C_{19}$     | 23-30 | Perempuan     | Perkotaan | <66 kW         |
| $C_{20}$     | 23-30 | Perempuan     | Pedesaan  | <66 kW         |
| $C_{21}$     | >30   | Perempuan     | Perkotaan | >66 kW         |
| $C_{22}$     | >30   | Perempuan     | Pedesaan  | >66 kW         |
| $C_{23}$     | >30   | Perempuan     | Perkotaan | <66 kW         |
| $C_{24}$     | >30   | Perempuan     | Pedesaan  | <66 kW         |

Masing-masing kelas risiko pada Tabel 1 menghasilkan proporsi atau persentase banyaknya nasabah  $w_k$ , spesifikasi harapan atau rata-rata frekuensi klaim tahunan  $\lambda_k$ , peluang  $q_{k1}$  (klaim yang menyebabkan cedera tubuh) dan  $q_{k2}$  (klaim tanpa cedera tubuh atau klaim dengan kerusakan barang).  $q_{k1}$  dan  $q_{k2}$  adalah total jumlah klaim yang diajukan oleh pemegang polis di  $C_k$ . Hasilnya bisa dilihat pada Tabel 2.

Tabel 2  
Rata-rata frekuensi klaim tahunan untuk dua puluh empat kelas risiko dan proporsi klaim dengan cedera tubuh dan tanpa cedera tubuh

| Kelas Risiko | Bobot $w_k$ | Frekuensi $\lambda_k$ | Peluang $q_{k1}$ | Peluang $q_{k2}$ |
|--------------|-------------|-----------------------|------------------|------------------|
| $C_1$        | 0.0009      | 0.4138                | 0.0891           | 0.9109           |
| $C_2$        | 0.0030      | 0.3323                | 0.0835           | 0.9165           |
| $C_3$        | 0.0036      | 0.3909                | 0.0949           | 0.9051           |
| $C_4$        | 0.0115      | 0.3140                | 0.0890           | 0.9110           |
| $C_5$        | 0.0217      | 0.2811                | 0.0823           | 0.9177           |
| $C_6$        | 0.0526      | 0.2257                | 0.0771           | 0.9229           |
| $C_7$        | 0.0477      | 0.2655                | 0.0877           | 0.9123           |
| $C_8$        | 0.0874      | 0.2132                | 0.0822           | 0.9178           |
| $C_9$        | 0.0613      | 0.2082                | 0.0746           | 0.9254           |
| $C_{10}$     | 0.1308      | 0.1672                | 0.0699           | 0.9301           |
| $C_{11}$     | 0.0666      | 0.1967                | 0.0796           | 0.9204           |
| $C_{12}$     | 0.1510      | 0.1580                | 0.0746           | 0.9254           |
| $C_{13}$     | 0.0004      | 0.3874                | 0.0946           | 0.9054           |
| $C_{14}$     | 0.0006      | 0.3111                | 0.0887           | 0.9113           |
| $C_{15}$     | 0.0027      | 0.3660                | 0.1007           | 0.8993           |
| $C_{16}$     | 0.0075      | 0.2940                | 0.0945           | 0.9055           |
| $C_{17}$     | 0.0067      | 0.2632                | 0.0874           | 0.9126           |
| $C_{18}$     | 0.0133      | 0.2113                | 0.0819           | 0.9181           |
| $C_{19}$     | 0.0336      | 0.2486                | 0.0931           | 0.9069           |
| $C_{20}$     | 0.0797      | 0.1997                | 0.0873           | 0.9127           |
| $C_{21}$     | 0.0230      | 0.1949                | 0.0793           | 0.9207           |
| $C_{22}$     | 0.0404      | 0.1565                | 0.0743           | 0.9257           |
| $C_{23}$     | 0.0505      | 0.1842                | 0.0846           | 0.9154           |
| $C_{24}$     | 0.1035      | 0.1479                | 0.0792           | 0.9208           |

Sumber data pengelompokan nasabah asuransi kendaraan bermotor dengan sistem *Bonus-Malus* pada Tabel 1 dan Tabel 2 [10].

#### 4.2 Klasifikasi Kelas Risiko dengan Simulasi Sistem *Bonus-Malus*

Klasifikasi kelas risiko dalam menentukan premi dengan sistem *Bonus-Malus* ada 9 tingkat. *State* dimulai dari *state* 0 hingga *state* 8, dengan matriks peluang transisinya berukuran  $9 \times 9$ . Tingkat yang lebih tinggi menunjukkan

premi yang paling mahal dan tingkat yang lebih rendah menunjukkan premi yang paling murah. Simulasi sistem *Bonus-Malus* yang dilakukan ada tiga kelompok sistem sebagai berikut.

1. Sistem *Bonus-Malus*  $-1/+2/+4$
2. Sistem *Bonus-Malus*  $-1/+2/+2$
3. Sistem *Bonus-Malus*  $-1/+3/+3$ .

Penentuan besar premi dari ketiga kelompok simulasi sistem *Bonus-Malus* tersebut berdasarkan jenis kecelakaan (jenis klaim) dan tingkat keparahan dari kecelakaan. Jenis kecelakaan dalam portofolio ini ada dua yaitu kecelakaan dengan cedera tubuh dan kecelakaan dengan kerusakan barang. Tingkat keparahan dari kecelakaan ada tiga kemungkinan (ringan, sedang dan parah) yang dinotasikan  $\theta_i$ , di mana setiap tingkat keparahan kecelakaannya memiliki peluang masing-masing sebagai berikut

$$P(\theta = \theta) = \begin{cases} 1/3, & \text{jika } \theta = \theta_1 = 1/2 \\ 1/3, & \text{jika } \theta = \theta_2 = 1 \\ 1/3, & \text{jika } \theta = \theta_3 = 3/2 \end{cases}$$

untuk dua puluh empat kelas risiko dan diasumsikan bahwa  $E[\Theta] = 1$ .

Penentuan besar premi dari ketiga simulasi sistem *Bonus-Malus* tersebut menggunakan *software Mathematica* 10.0, di mana peluang stasioner atau proporsi banyaknya nasabah untuk tingkat  $\ell$  ( $\pi_\ell$ ) diperoleh dari persamaan (1), besar premi relatif terhadap premi awal untuk tingkat  $\ell$  ( $r_\ell$ ) diperoleh dari persamaan (2).

### 4.3 Menentukan Besar Premi dari Beberapa Simulasi Sistem *Bonus-Malus* dengan Jenis Kecelakaan dan Tingkat Keparahan

#### 4.3.1 Sistem *Bonus-Malus* $-1/+2/+4$

Sistem *Bonus-Malus*  $-1/+2/+4$  adalah sistem yang jika tidak ada klaim yang dilaporkan oleh pemegang polis selama setahun maka dia berpindah turun satu tingkat ( $-1$ ) atau mendapat *Bonus*. Klaim yang dilaporkan oleh pemegang polis dengan kerusakan barang dihukum naik dua tingkat ( $+2$ ) atau mendapat *Malus*. Klaim yang dilaporkan oleh pemegang polis dengan cedera tubuh dihukum naik empat tingkat ( $+4$ ) atau mendapat *Malus*. Jika  $n_1$  klaim dengan cedera tubuh dan  $n_2$  klaim dengan kerusakan barang yang dilaporkan selama setahun, maka pemegang polis bergerak  $4n_1 + 2n_2$ . Sistem ini dinotasikan sebagai  $-1/+2/+4$ .

Matriks peluang transisi sistem  $-1/+2/+4$  untuk pemegang polis dengan rata-rata frekuensi klaim  $\vartheta$  dan vektor peluang  $q = (q_1, q_2)^t$



$$M = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{matrix} & \left[ \begin{matrix} P_0 & 0 & P_1 & 0 & P_2 & 0 & P_3 & 0 & 1 - \Sigma_0 \\ P_0 & 0 & 0 & P_1 & 0 & P_2 & 0 & P_3 & 1 - \Sigma_1 \\ 0 & P_0 & 0 & 0 & P_1 & 0 & P_2 & 0 & 1 - \Sigma_2 \\ 0 & 0 & P_0 & 0 & 0 & P_1 & 0 & P_2 & 1 - \Sigma_3 \\ 0 & 0 & 0 & P_0 & 0 & 0 & P_1 & 0 & 1 - \Sigma_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & P_0 & 0 & 0 & P_1 & 1 - \Sigma_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_0 & 0 & 0 & 1 - \Sigma_6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_0 & 0 & 1 - \Sigma_7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_0 & 1 - \Sigma_8 \end{matrix} \right] \end{matrix}$$

di mana

$$P_0 = \exp(-\vartheta) \tag{3}$$

$$P_1 = \vartheta q_2 \exp(-\vartheta q_2) \exp(-\vartheta q_1) \tag{4}$$

$$P_2 = \frac{(\vartheta q_2)^2}{2!} \exp(-\vartheta q_2) \exp(-\vartheta q_1) + \exp(-\vartheta q_2) \vartheta q_1 \exp(-\vartheta q_1) \tag{5}$$

$$P_3 = \frac{(\vartheta q_2)^3}{3!} \exp(-\vartheta q_2) \exp(-\vartheta q_1) + \vartheta q_2 \exp(-\vartheta q_2) \vartheta q_1 \exp(-\vartheta q_1) \tag{6}$$

$$\vartheta = (\lambda_\kappa \theta_i), \quad i = 1, 2, 3$$

$\Sigma$  merupakan jumlah dari semua elemen dalam baris yang sama.

$P_0$  menyatakan peluang tidak ada klaim yang dilaporkan oleh pemegang polis selama setahun.  $P_1$  menyatakan peluang klaim yang dilaporkan oleh pemegang polis akibat dari kerusakan barang 1 kali tanpa cedera tubuh.  $P_2$  menyatakan peluang klaim yang dilaporkan oleh pemegang polis akibat dari kerusakan barang 2 kali tanpa cedera tubuh atau akibat dari cedera tubuh 1 kali tanpa kerusakan barang.  $P_3$  menyatakan peluang klaim yang dilaporkan oleh pemegang polis akibat dari kerusakan barang 3 kali tanpa cedera tubuh atau akibat dari kerusakan barang 1 kali dan cedera tubuh 1 kali. Hasil matriks peluang transisi  $M$  diperoleh dari persamaan (3), (4), (5) dan (6). Hasil simulasi sistem  $-1/+2/+4$  bisa dilihat pada Tabel 3 berikut.

Tabel 3  
Hasil  $\pi_\ell(\%)$  dan  $r_\ell(\%)$  untuk sistem  $-1/+2/+4$

| Level $\ell$ | $\pi_\ell(\%)$ | $r_\ell(\%)$ |
|--------------|----------------|--------------|
| 0            | 52.50          | 84.96        |
| 1            | 9.15           | 102.56       |
| 2            | 11.17          | 105.31       |
| 3            | 6.10           | 116.63       |
| 4            | 6.05           | 119.64       |
| 5            | 4.31           | 127.62       |
| 6            | 4.02           | 130.74       |
| 7            | 3.45           | 134.92       |
| 8            | 3.27           | 137.72       |

### 4.3.2 Sistem *Bonus-Malus* $-1/+2/+2$

Sistem *Bonus-Malus*  $-1/+2/+2$  merupakan sistem yang jika tidak ada klaim yang dilaporkan oleh pemegang polis selama setahun, maka dia bergerak turun satu tingkat ( $-1$ ) atau mendapat *Bonus*. Klaim yang dilaporkan oleh pemegang polis dengan kerusakan barang dihukum naik dua tingkat ( $+2$ ). Klaim yang dilaporkan dengan cedera tubuh dihukum naik dua tingkat ( $+2$ ) atau mendapat *Malus*. Sistem ini dinotasikan dengan  $-1/+2/+2$ .

Matriks peluang transisi sistem  $-1/+2/+2$  untuk pemegang polis dengan rata-rata frekuensi klaim  $\vartheta$  dan vektor peluang  $q = (q_1, q_2)^t$

$$M = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{matrix} & \left[ \begin{matrix} P_0 & 0 & P_1 & 0 & P_2 & 0 & P_3 & 0 & 1 - \Sigma_0 \\ P_0 & 0 & 0 & P_1 & 0 & P_2 & 0 & P_3 & 1 - \Sigma_1 \\ 0 & P_0 & 0 & 0 & P_1 & 0 & P_2 & 0 & 1 - \Sigma_2 \\ 0 & 0 & P_0 & 0 & 0 & P_1 & 0 & P_2 & 1 - \Sigma_3 \\ 0 & 0 & 0 & P_0 & 0 & 0 & P_1 & 0 & 1 - \Sigma_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & P_0 & 0 & 0 & P_1 & 1 - \Sigma_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_0 & 0 & 0 & 1 - \Sigma_6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_0 & 0 & 1 - \Sigma_7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_0 & 1 - \Sigma_8 \end{matrix} \right] \end{matrix}$$

di mana

$$P_0 = \exp(-\vartheta) \quad (7)$$

$$P_1 = \vartheta q_2 \exp(-\vartheta q_2) \exp(-\vartheta q_1) + \exp(-\vartheta q_2) \vartheta q_1 \exp(-\vartheta q_1) \quad (8)$$

$$P_2 = \frac{(\vartheta q_2)^2}{2!} \exp(-\vartheta q_2) \exp(-\vartheta q_1) + \exp(-\vartheta q_2) \frac{(\vartheta q_1)^2}{2!} \exp(-\vartheta q_1) + \vartheta q_2 \exp(-\vartheta q_2) \vartheta q_1 \exp(-\vartheta q_1) \quad (9)$$

$$P_3 = \frac{(\vartheta q_2)^3}{3!} \exp(-\vartheta q_2) \exp(-\vartheta q_1) + \exp(-\vartheta q_2) \frac{(\vartheta q_1)^3}{3!} \exp(-\vartheta q_1) + \frac{(\vartheta q_2)^2}{2!} \exp(-\vartheta q_2) \vartheta q_1 \exp(-\vartheta q_1) + \vartheta q_2 \exp(-\vartheta q_2) \frac{(\vartheta q_1)^2}{2!} \exp(-\vartheta q_1) \quad (10)$$

$$\vartheta = (\lambda_k \theta_i), \quad i = 1, 2, 3$$

$\Sigma$  merupakan jumlah dari semua elemen dalam baris yang sama.

$P_0$  menyatakan peluang tidak ada klaim yang dilaporkan oleh pemegang polis selama setahun.  $P_1$  menyatakan peluang klaim yang dilaporkan oleh pemegang polis akibat dari kerusakan barang 1 kali tanpa cedera tubuh atau akibat dari cedera tubuh 1 kali tanpa kerusakan barang.  $P_2$  menyatakan peluang klaim yang dilaporkan oleh pemegang polis akibat dari kerusakan barang 2 kali tanpa cedera tubuh atau cedera tubuh 2 kali tanpa kerusakan barang atau akibat dari

kerusakan barang 1 kali dan cedera tubuh 1 kali.  $P_3$  menyatakan peluang klaim yang dilaporkan oleh pemegang polis akibat dari kerusakan barang 3 kali tanpa cedera tubuh atau cedera tubuh 3 kali tanpa kerusakan barang atau kerusakan barang 2 kali dan cedera tubuh 1 kali atau akibat dari kerusakan barang 1 kali dan cedera tubuh 2 kali. Hasil matriks peluang transisi  $M$  diperoleh dari persamaan (7), (8), (9) dan (10). Hasil simulasi sistem  $-1/+2/+2$  bisa dilihat pada Tabel 4

Tabel 4  
Hasil  $\pi_\ell(\%)$  dan  $r_\ell(\%)$  untuk sistem  $-1/+2/+2$

| Level $\ell$ | $\pi_\ell(\%)$ | $r_\ell(\%)$ |
|--------------|----------------|--------------|
| 0            | 54.70          | 85.76        |
| 1            | 9.65           | 103.40       |
| 2            | 11.81          | 106.14       |
| 3            | 5.81           | 119.19       |
| 4            | 5.48           | 122.84       |
| 5            | 3.78           | 130.35       |
| 6            | 3.38           | 133.55       |
| 7            | 2.81           | 137.52       |
| 8            | 2.60           | 139.84       |

berikut.

### 4.3.3 Sistem *Bonus-Malus* $-1/+3/+3$

Sistem *Bonus-Malus*  $-1/+3/+3$  merupakan sistem yang jika tidak ada klaim yang dilaporkan oleh pemegang polis selama setahun, maka dia bergerak turun satu tingkat ( $-1$ ) atau mendapat *Bonus*. Klaim yang dilaporkan oleh pemegang polis dengan kerusakan barang dihukum naik tiga tingkat ( $+3$ ). Klaim yang dilaporkan dengan cedera tubuh dihukum naik tiga tingkat ( $+3$ ) atau mendapat *Malus*. Sistem ini dinotasikan dengan  $-1/+3/+3$ .

Matriks peluang transisi sistem  $-1/+3/+3$  untuk pemegang polis dengan rata-rata frekuensi klaim  $\vartheta$  dan vektor peluang  $q = (q_1, q_2)^t$

$$M = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{matrix} & \left[ \begin{matrix} P_0 & 0 & 0 & P_1 & 0 & 0 & P_2 & 0 & 1 - \Sigma_0 \\ P_0 & 0 & 0 & 0 & P_1 & 0 & 0 & P_2 & 1 - \Sigma_1 \\ 0 & P_0 & 0 & 0 & 0 & P_1 & 0 & 0 & 1 - \Sigma_2 \\ 0 & 0 & P_0 & 0 & 0 & 0 & P_1 & 0 & 1 - \Sigma_3 \\ 0 & 0 & 0 & P_0 & 0 & 0 & 0 & P_1 & 1 - \Sigma_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & P_0 & 0 & 0 & 0 & 1 - \Sigma_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_0 & 0 & 0 & 1 - \Sigma_6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_0 & 0 & 1 - \Sigma_7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_0 & 1 - \Sigma_8 \end{matrix} \right] \end{matrix}$$

di mana

$$P_0 = \exp(-\vartheta) \quad (11)$$

$$P_1 = \vartheta q_2 \exp(-\vartheta q_2) \exp(-\vartheta q_1) + \exp(-\vartheta q_2) \vartheta q_1 \exp(-\vartheta q_1) \quad (12)$$

$$P_2 = \frac{(\vartheta q_2)^2}{2!} \exp(-\vartheta q_2) \exp(-\vartheta q_1) + \exp(-\vartheta q_2) \frac{(\vartheta q_1)^2}{2!} \exp(-\vartheta q_1) + \vartheta q_2 \exp(-\vartheta q_2) \vartheta q_1 \exp(-\vartheta q_1) \quad (13)$$

$$\vartheta = (\lambda_k \theta_i), \quad i = 1, 2, 3$$

$\Sigma$  merupakan jumlah dari semua elemen dalam baris yang sama.

$P_0$  menyatakan peluang tidak ada klaim yang dilaporkan oleh pemegang polis selama setahun.  $P_1$  menyatakan peluang klaim yang dilaporkan oleh pemegang polis akibat dari kerusakan barang 1 kali tanpa cedera tubuh atau akibat dari cedera tubuh 1 kali tanpa kerusakan barang.  $P_2$  menyatakan peluang klaim yang dilaporkan oleh pemegang polis akibat dari kerusakan barang 2 kali tanpa cedera tubuh atau cedera tubuh 2 kali tanpa kerusakan barang atau akibat dari kerusakan barang 1 kali dan cedera tubuh 1 kali. Hasil matriks peluang transisi  $M$  diperoleh dari persamaan (11), (12) dan (13). Hasil simulasi sistem  $-1/+3/+3$  bisa dilihat pada Tabel 5 berikut.

Tabel 5  
Hasil  $\pi_\ell(\%)$  dan  $r_\ell(\%)$  untuk sistem  $1/+3/+3$

| Level $\ell$ | $\pi_\ell(\%)$ | $r_\ell(\%)$ |
|--------------|----------------|--------------|
| 0            | 42.44          | 80.81        |
| 1            | 6.96           | 98.06        |
| 2            | 8.41           | 100.82       |
| 3            | 10.23          | 103.60       |
| 4            | 6.19           | 116.34       |
| 5            | 6.53           | 119.87       |
| 6            | 6.72           | 123.76       |
| 7            | 6.07           | 129.95       |
| 8            | 6.45           | 132.85       |

Dari ketiga sistem tersebut kita bisa membandingkan hasil untuk semua sistem *Bonus-Malus*. Lebih jelas perbandingannya bisa dilihat pada Tabel 6

Tabel 6  
Hasil untuk sistem *Bonus-Malus*  $-1/+2/+4$ ,  $-1/+2/+2$  dan  $-1/+3/+3$

| Level  | $-1/+2/+4$     |              | $-1/+2/+2$     |              | $-1/+3/+3$     |              |
|--------|----------------|--------------|----------------|--------------|----------------|--------------|
| $\ell$ | $\pi_\ell(\%)$ | $r_\ell(\%)$ | $\pi_\ell(\%)$ | $r_\ell(\%)$ | $\pi_\ell(\%)$ | $r_\ell(\%)$ |
| 0      | 52.50          | 84.96        | 54.70          | 85.76        | 42.44          | 80.81        |
| 1      | 9.15           | 102.56       | 9.65           | 103.40       | 6.96           | 98.06        |
| 2      | 11.17          | 105.31       | 11.81          | 106.14       | 8.41           | 100.82       |
| 3      | 6.10           | 116.63       | 5.81           | 119.19       | 10.23          | 103.60       |
| 4      | 6.05           | 119.64       | 5.48           | 122.84       | 6.19           | 116.34       |
| 5      | 4.31           | 127.62       | 3.78           | 130.35       | 6.53           | 119.87       |
| 6      | 4.02           | 130.74       | 3.38           | 133.55       | 6.72           | 123.76       |
| 7      | 3.45           | 134.92       | 2.81           | 137.52       | 6.07           | 129.96       |
| 8      | 3.27           | 137.72       | 2.60           | 139.84       | 6.45           | 132.85       |

berikut.

Pada Tabel 6 diberikan hasil simulasi untuk masing-masing 9 tingkat sistem *Bonus-Malus*. Dapat dilihat pada semua sistem *Bonus-Malus*, bahwa ( $\pi_\ell$ ) merupakan persentase atau proporsi banyaknya nasabah yang diperoleh dari persamaan (1) dan ( $r_\ell$ ) merupakan besar premi relatif terhadap premi awal yang diperoleh dari persamaan (2). Untuk semua sistem, setiap tahun yang tidak ada klaim dihargai dengan turun satu tingkat. Sistem *Bonus-Malus* pertama menghukum setiap klaim dengan kerusakan barang dengan naik dua tingkat dan klaim dengan cedera tubuh naik empat tingkat (sistem ini dinotasikan  $-1/+2/+4$ ). Sistem *Bonus-Malus* yang kedua menghukum setiap klaim (kerusakan barang atau cedera tubuh) dengan naik dua tingkat (sistem ini dinotasikan  $-1/+2/+2$ ). Sistem *Bonus-Malus* yang ketiga menghukum setiap klaim (kerusakan barang atau cedera tubuh) dengan naik tiga tingkat (sistem ini dinotasikan  $-1/+3/+3$ ).

Untuk semua sistem bisa dilihat bahwa proporsi nasabahnya yang berada di *state* 0 sebesar 52.50%, 54.70% dan 42.44% untuk sistem pertama, kedua dan ketiga. Proporsi nasabah yang berada di *state* 8 sebesar 3.27%, 2.60% dan 6.45% untuk sistem pertama, kedua dan ketiga.

Dari ketiga sistem tersebut bisa dibandingkan bahwa proporsi nasabah yang paling besar di *state* 0 ada di sistem kedua sebesar 54.70% dibandingkan dengan sistem yang lain karena hukumannya paling kecil dengan besar premi relatifnya sebesar 85.76% lebih murah dari harga premi awal. Untuk proporsi nasabah yang paling kecil di *state* 0 ada di sistem ketiga sebesar 42.44% dengan besar premi relatifnya sebesar 80.81% lebih murah dari harga premi awal.

Untuk proporsi nasabah yang paling besar di *state* 8 ada di sistem ketiga sebesar 6.45% hukumannya paling besar sehingga banyak nasabah berada di *state* tinggi karena setiap kali nasabah yang mengalami kesalahan naiknya 3 tingkat dengan besar premi relatifnya sebesar 132.85% lebih mahal dari harga premi awal. Untuk proporsi nasabah yang paling kecil di *state* 8 ada di sistem kedua

sebesar 2.60% hukumannya paling kecil dengan harga premi relatifnya sebesar 139.84% lebih mahal dari harga premi awal.

Hukuman yang paling besar yaitu sistem ketiga ( $-1/+3/+3$ ) dengan persentase nasabah yang ada di *state* 8 sebesar 6.45%, karena nasabahnya semakin banyak maka bayar preminya lebih sedikit atau lebih murah dibandingkan dengan sistem lainnya dan persentase nasabah yang ada di *state* 0 yang paling kecil sebesar 42.44%, karena nasabahnya semakin sedikit maka bayar preminya lebih banyak atau lebih mahal. Hukuman yang paling kecil yaitu sistem kedua ( $-1/+2/+2$ ) dengan persentase nasabah yang ada di *state* 8 sebesar 2.60%, karena nasabahnya semakin sedikit maka bayar preminya lebih mahal dibandingkan dengan sistem lainnya dan persentase nasabah yang ada di *state* 0 yang paling besar sebesar 54.70%, karena nasabahnya semakin banyak maka bayar preminya lebih murah dibandingkan dengan sistem lainnya.

### SIMPULAN

Asuransi kendaraan bermotor sistem *Bonus-Malus* pada penelitian ini, didasarkan faktor-faktor *prior* (kelompok umur, jenis kelamin, wilayah, dan daya kendaraan) dan *posterior* (banyaknya kecelakaan yang dialami oleh pemegang polis) yang menghasilkan dua puluh empat kelompok kelas risiko.

Simulasi sistem *Bonus-Malus* mengkaji tiga sistem: Sistem (1) kerusakan barang naik dua kelas, cedera tubuh naik empat kelas; Sistem (2) kerusakan barang atau cedera tubuh naik dua kelas; Sistem (3) kerusakan barang atau cedera tubuh naik tiga kelas. Hasil dari simulasi menunjukkan bahwa proporsi nasabah di kelas premi paling murah, yang paling banyak di Sistem (2) sebesar 54.70% dengan besar premi relatif sebesar 85.76% dan yang paling sedikit di Sistem (3) sebesar 42.44% dengan besar premi relatif sebesar 80.81%. Proporsi nasabah di kelas premi paling mahal, yang paling banyak di Sistem (3) sebesar 6.45% dengan besar premi relatif sebesar 132.85% dan yang paling sedikit di Sistem (2) sebesar 2.60% dengan besar premi relatif sebesar 139.84%.

### DAFTAR PUSTAKA

- [1] Centeno M, Silva JMA. 2001. Bonus systems in an open portofolio. *Insurance, Mathematics & Economis*. 28:341-350.
- [2] Denuit M, Dhaene J. 2001. Bonus-Malus scales using exponential loss functions. *German Actuarial Bulletin*. 25:13-27.
- [3] Denuit M, Marechal X, Pitrebois S, Walhin JF. 2007. *Actuarial Modelling of Claim Counts*. England (UK): John Wiley&Sons.
- [4] Gilde V, Sundt B. 1989. On bonus systems with credibility scales. *Scandinavian Actuarial Journal*. 1989:13-22.

- [5] Lemaire J. 1995. *Bonus-Malus Systems in Automobile Insurance*. Boston: penerbit akademis Kluwer.
- [6] Lemaire J, Hongmin Zi. 1994. A comparative analysis of 30 bonus-malus system. *Astin Buletin*. 24(2):287-309.
- [7] Norberg R. 1976. A credibility theory for automobile bonus system. *Scandinavian Actuarial Journal*. 1976:92-107.
- [8] Picard P. 1976. Generalisation de letude sur la survenance des sinistres en assurance automobile. *Bulletin Trimestriel des Actuaires Francais*. 385:204-267.
- [9] Pitrebois S, Denuit M, Walhin JF. 2003. Setting a bms in the presence of other rating factors: taylor'swork revisited. *Astin Bulletin*. 33:419-436.
- [10] Pitrebois S, Denuit M, Walhin JF. 2006. Multi-event bonus-malus scales. *The journal of risk and insurance*. 73(3):517-528.
- [11] Privault N. 2013. *Understanding Markov Chains: Examples and Applications*. Singapore: Springer.
- [12] Rolski T, Schmidli H, Schmidt V, Teugels J. 1999. *Stochastic Processes for Insurance and Finance*. New York: John Wiley & Sons.

