PENGGUNAAN METODE HOMOTOPI PADE' UNTUK MENYELESAIKAN MASALAH LOTKA–VOLTERRA

ROHAETI, E[1]., JAHARUDDIN[2], DAN A. KUSNANTO[2]

[1]Mahasiswa Pascasarjana
Sekolah Pascasarjana Institut Pertanian Bogor
Jl Meranti, Kampus IPB Darmaga, Bogor 16680, Indonesia

[2]Departemen Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Pertanian Bogor
Jl Meranti, Kampus IPB Darmaga, Bogor 16680, Indonesia

Abstrak : Model Lotka–Volterra merupakan model interaksi antar spesies mangsa dan spesies pemangsa pada sebuah lingkungan dan dinyatakan dalam bentuk persamaan taklinear. Persamaan Lotka-Volterra diselesaikan dengan metode homotopi Pade'. Metode homotopi Pade' merupakan pengembangan dari metode homotopi. Dalam hal ini, penyelesaian dengan menggunakan metode homotopi Pade' diperoleh dengan menggunakan penyelesaian dengan menggunakan metode homotopi. Metode homotopi pade' lebih cepat mencapai kekonvergenan dibandingkan dengan metode homotopi. Dengan metode homotopi pade' diberikan suatu interpretasi fisis untuk kasus mangsa lebih banyak dari pemangsa.

Kata Kunci: Mangsa pemangsa, Homotopi Pade', Lotka–Volterra,

1. PENDAHULUAN

Salah satu interaksi antar spesies adalah hubungan antara mangsa (*prey*) dan pemangsa (*predator*). Interaksi ini sangat erat kaitannya karena tanpa mangsa, *predator* tidak dapat bertahan hidup karena tidak ada sumber makanan. Sebaliknya *predator* berfungsi sebagai pengontrol populasi mangsa. Fenomena tersebut dapat dijelaskan dalam suatu model matematika yaitu model Lotka–Volterra.

Model Lotka-Volterra berbentuk tak linear. Model berupa persamaan taklinear biasanya sulit diselesaikan secara analitik. Masalah tak linear ini menarik perhatian peneliti sejak pertengahan abad ke-19 untuk mendapatkan suatu metode yang efisien untuk menyelesaikannya. Liao dalam [4] memperkenalkan suatu metode yang disebut metode homotopi untuk menyelesaikan suatu persamaan diferensial tak linear. Beberapa metode yang telah digunakan untuk menyelesaikan model Lotka–Volterra antara lain metode dekomposisi Adomian [1], metode iterasi variational [5], dan metode homotopi pertubasi [6].

Dalam tulisan ini akan digunakan metode homotopi Pade' [2] yang merupakan pengembangan dari metode homotopi. Penyelesaian masalah taklinear dengan menggunakan metode homotopi Pade' dilakukan dengan menggunakan penyelesaian yang diperoleh dari metode homotopi. Dalam hal ini bentuknya berupa fungsi rasional. Berdasarkan metode homotopi Pade`, akan dikonstruksi suatu metode numerik untuk menghampiri jumlah populasi mangsa dan pemangsa. Hasil numerik yang diperoleh akan diimplementasikan dengan menggunakan bantuan *software* berbasis fungsional.

2. MODEL MATEMATIKA

Pada bagian ini dibahas model matematika untuk menjelaskan interaksi antara dua spesies yang berbeda berdasarkan pada Haberman [3]. Model Lotka–Volterra adalah model antara populasi pemangsa dan populasi mangsa pada sebuah lingkungan yang bergantung satu sama lain berdasarkan hubungan interaksi antara kedua spesies. Misalkan $x(t)$ dan $y(t)$ masing–masing menunjukan banyaknya spesies mangsa dan pemangsa pada waktu t. Jika mangsa dan pemangsa tidak saling berinteraksi, maka model pertumbuhan populasi mangsa adalah

$$\frac{dx}{dt} = ax(t).$$

Dalam hal ini a menunjukkan laju kelahiran dari populasi mangsa. Jika populasi mangsa berkurang, maka akan mengakibatkan populasi pemangsa berkurang. Hal ini dikarenakan mangsa merupakan sumber makanan untuk pemangsa. Jadi laju pertumbuhan populasi pemangsa bergantung pada banyaknya populasi mangsa, yaitu

$$\frac{dy}{dt} = -ey(t),$$

dengan e menunjukkan laju kematian dari populasi pemangsa. Hal ini disebabkan karena spesies pemangsa bergantung pada mangsa dan akan berkurang jumlahnya. Selanjutnya, jika kedua spesies tersebut saling berinteraksi dan populasi pemangsa bergantung pada populasi mangsa sebagai sumber makanan, maka model yang diungkapkan oleh Lotka–Volterra adalah

$$
\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= ax(t) - cx(t)y(t) \\
\frac{dy}{dt} &= -ey(t) + fx(t)y(t).
\end{aligned} \tag{2.1}
$$

Parameter $a,\ c,\ e,\ f$ menunjukkan interaksi antara kedua spesies tersebut, dengan a menunjukkan laju kelahiran dari populasi mangsa, c menunjukkan tingkat interaksi antara mangsa dan pemangsa yang berpengaruh terhadap mangsa atau menunjukkan adanya predasi yang mengakibatkan berkurangnya mangsa, e menunjukkan laju kematian dari populasi pemangsa dan bergantung pada mangsa dan kematian alami yang mengakibatkan berkurangnya pemangsa, f menunjukkan tingkat interaksi antara mangsa dan pemangsa yang berpengaruh pada pemangsa.

3. ANALISIS METODE

Pada bagian ini dibahas konsep dasar metode homotopi. Misalkan diberikan sistem persamaan diferensial berikut :

$$
\begin{aligned}
A_1[u(t), v(t)] &= 0 \\
A_2[u(t), v(t)] &= 0,
\end{aligned} \tag{3.1}
$$

dengan A_1 dan A_2 suatu operator turunan yang bentuknya taklinear, u dan v fungsi yang akan ditentukan dan bergantung pada t.

Selanjutnya, didefinisikan suatu fungsi homotopi H_1 dan H_2 sebagai berikut

$$H_1[\phi(t,q), \psi(t,q), q] = (1-q)\,\mathcal{L}_1[\phi(t,q) - u_o(t)] + qh_1 A_1[\phi(t,q), \psi(t,q)]$$

$$H_2[\phi(t,q), \psi(t,q), q] = (1-q)\,\mathcal{L}_2[\psi(t,q) - v_o(t)] + qh_2 A_2[\phi(t,q), \psi(t,q)], \tag{3.2}$$

dengan $\mathcal{L}_1$ dan $\mathcal{L}_2$ suatu operator linear, ϕ dan ψ fungsi yang akan ditentukan dan bergantung pada t dan parameter q serta $u_0(t)$ dan $v_0(t)$ merupakan pendekatan awal penyelesaian. Berdasarkan persamaan (3.2) pada saat $q = 0$, diperoleh

$$H_1[\phi(t,0), \psi(t,0), 0] = \mathcal{L}_1[\phi(t,0) - u_o(t)]$$

dan

$$H_2[\phi(t,0), \psi(t,0), 0] = \mathcal{L}_2[\psi(t,0) - v_o(t)],$$

dan pada saat $q = 1$, diperoleh persamaan:

$$H_1[\phi(t,1), \psi(t,1), 1] = h_1 A_1[\phi(t,1), \psi(t,1)]$$

dan

$$H_2[\phi(t,1),\psi(t,1),1] = h_2 A_2[\phi(t,1),\psi(t,1)].$$

Berdasarkan sifat operator linear $\mathcal{L}_1$ dan $\mathcal{L}_2$, maka penyelesaian persamaan $H_1(\phi(t,0),0)=0$ dan $H_2(\psi(t,0),0)=0$ masing–masing adalah

$$\phi(t,0) = u_o(t) \text{ dan } \psi(t,0) = v_o(t).$$

Berdasarkan persamaan (3.1), maka penyelesaian persamaan $H_1(\phi(t,1),1)=0$ dan $H_2(\psi(t,1),1)=0$ masing–masing adalah

$$\phi(t,1) = u(t) \text{ dan } \psi(t,1) = v(t).$$

Deret Taylor dari $\phi(t,q)$ dan $\psi(t,q)$ terhadap q di sekitar $q = 0$ adalah

$$\begin{aligned}
&\phi(t,0) = \phi_0(t,0) \text{ atau } \phi(t,0) = \phi_0(t) \\
&\psi(t,0) = \psi_0(t,0) \text{ atau } \psi(t,0) = \psi_0(t),
\end{aligned} \tag{3.3}$$

dengan $\phi_0(t) = u_0(t)$ dan $\psi_0(t) = v_0(t)$. Pada saat $q = 1$ dan persamaan (3.3), diperoleh persamaan berikut

$$\phi(t,1) = \phi_0(t) + \sum_{m=1}^{\infty} \phi_m(t,1)$$

$$\psi(t,1) = \psi_0(t) + \sum_{m=1}^{\infty} \psi_m(t,1).$$

Karena $\phi(t,1) = u(t)$ dan $\psi(t,1) = v(t)$, maka diperoleh

$$u(t) = u_0(t) + \sum_{m=1}^{\infty} u_m(t)$$

$$v(t) = v_0(t) + \sum_{m=1}^{\infty} v_m(t),$$

dengan $u_m(t)$ dan $v_m(t)$, $m = 1,2,...$ yang akan ditentukan dan $u_0(t)$ dan $v_0(t)$ merupakan pendekatan awal yang diberikan.

Selanjutnya, fungsi $\phi(t,q)$ dan $\psi(t,q)$ adalah penyelesaian dari persamaan berikut $H_1[\phi(t,q),\psi(t,q),q] = 0$ dan $H_1[\phi(t,q),\psi(t,q),q] = 0$ atau

$$(1-q)\mathcal{L}_1[\phi(t,q) - u_o(t)] = qh_1 A_1[\phi(t,q),\psi(t,q)]$$

$$(1-q)\mathcal{L}_2[\psi(t,q) - v_o(t)] = qh_2 A_2[\phi(t,q),\psi(t,q)]. \tag{3.4}$$

Kemudian jika kedua ruas pada persamaan (3.4) diturunkan terhadap q hingga m kali, maka diperoleh sebagai berikut

$$\mathcal{L}_1\,[u_m(t)-\chi_m u_{m-1}(t)] = h_1\, R_{1,m}(\vec{u}_{m-1},\vec{v}_{m-1})$$
$$\mathcal{L}_2\,[v_m(t)-\chi_m v_{m-1}(t)] = h_2\, R_{2,m}(\vec{u}_{m-1},\vec{v}_{m-1}), \tag{3.5}$$

dengan

$$R_{1,m}(\vec{u}_{m-1},\vec{v}_{m-1}) = \frac{1}{(m-1)!}\frac{\partial^{m-1}A_1[\phi(t,q),\psi(t,q)]}{\partial q^{m-1}}\Big|_{q=0}$$
$$R_{2,m}(\vec{u}_{m-1},\vec{v}_{m-1}) = \frac{1}{(m-1)!}\frac{\partial^{m-1}A_2[\phi(t,q),\psi(t,q)]}{\partial q^{m-1}}\Big|_{q=0} \tag{3.6}$$
$$\vec{u}_{m-1}(t) = (u_0(t), u_1(t),\dots, u_m(t))$$
$$\vec{v}_{m-1}(t) = (v_0(t), v_1(t),\dots, v_m(t))$$
$$\chi_m = \begin{cases} 0, m \le 1 \\ 1, m > 1. \end{cases} \tag{3.7}$$

Jadi berdasarkan metode homotopi diperoleh penyelesaian pendekatan sistem persamaan (3.1) sebagai berikut

$$u(t) = u_0(t) + \sum_{m=1}^{\infty} u_m(t)$$
$$v(t) = v_0(t) + \sum_{m=1}^{\infty} v_m(t),$$

dengan $u_m(t)$, $v_m(t)$, $m = 1,2,\dots$ diperoleh dari persamaan (3.5) dan $u_0(t)$ dan $v_0(t)$ merupakan pendekatan awal yang diberikan.

Metode homotopi Pade' merupakan pengembangan dari metode homotopi. Dalam hal ini penyelesaian masalah taklinear dinyatakan dalam bentuk

$$R_{m,n}(t) = \frac{\sum_{k=0}^{m} p_k t^k}{\sum_{k=0}^{n} q_k t^k},$$

dengan p_k dan q_k ditentukan berdasarkan penyelesaian dalam metode homotopi, dan m, n masing–masing suku yang digunakan.

Secara singkat penggunaan metode homotopi Pade' untuk menyelesaikan suatu masalah taklinear adalah

1. Masalah taklinear diselesaikan dengan metode homotopi dan penyelesaiannya dinyatakan dalam bentuk deret sebagai berikut
$$x(t) = \sum_{m=0}^{\infty} x_m(t).$$
2. Metode homotopi Pade' untuk masalah taklinear tersebut dilakukan dengan langkah–langkah berikut :
   a. Membentuk persamaan berikut
   $$x(t).q_n(t) - p_m(t) = 0,$$

dengan $x(t)$ penyelesaian yang diperoleh dari penyelesaian metode homotopi.

b. Menentukan nilai p_k dan q_k dari langkah (a).

c. Menggunakan p_k dan q_k yang telah diperoleh pada (b) ke dalam penyelesaian $R_{m,n}(t)$ yang merupakan penyelesaian masalah taklinear dengan metode homotopi Pade'.

4. APLIKASI PADA MODEL LOTKA VOLTERRA

Pada bagian ini dibahas penggunaan metode homotopi Pade' untuk menyelesaikan masalah pada model Lotka–Volterra. Perhatikan model Lotka–Volterra berikut ini

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= ax(t) - cx(t)y(t) \\ \frac{dy}{dt} &= -ey(t) + fx(t)y(t), \end{aligned} \tag{4.1}$$

dengan syarat awal $x(0) = n_1$ dan $y(0) = n_2$, dengan n_1 dan n_2 masing–masing banyaknya mangsa dan pemangsa pada saat awal. Karena model Lotka–Volterra merupakan masalah taklinear dan tidak dapat diselesaikan secara eksak, maka berikut ini akan dicari penyelesaian masalah nilai awal (4.1) dengan menggunakan metode homotopi Pade'. Misalkan didefinisikan operator sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1[\phi(t,q)] &= \frac{\partial \phi(t,q)}{\partial t} \\ \mathcal{L}_2[\psi(t,q)] &= \frac{\partial \psi(t,q)}{\partial t} \\ A_1[\phi(t,q),\psi(t,q)] &= \frac{\partial \phi(t,q)}{\partial t} - a\phi(t,q) + c\phi(t,q)\psi(t,q) \\ A_2[\phi(t,q),\psi(t,q)] &= \frac{\partial \psi(t,q)}{\partial t} + e\psi(t,q) - f\phi(t,q)\psi(t,q), \end{aligned}$$

dengan q merupakan suatu parameter, $\phi(t,q)$ dan $\psi(t,q)$ adalah suatu fungsi yang bergantung pada t dan q. Penyelesaian masalah nilai awal persamaan (4.1) dengan metode homotopi dinyatakan dalam persamaan berikut

$$x(t) = x_0(t) + \sum_{m=1}^{+\infty} x_m(t) \text{ dan } y(t) = y_0(t) + \sum_{m=1}^{+\infty} y_m(t),$$

dengan $x_m(t)$ dan $y_m(t)$, $m = 1,2,3...$ yang akan ditentukan. Jika kedua ruas pada persamaan (3.5) diintegralkan dan persamaan (3.6) digunakan, maka diperoleh persamaan berikut

$$x_m(t) = \chi_m x_{m-1}(t) + h_1 \int_0^t \frac{1}{(m-1)!} \frac{\partial^{m-1} A_1[\phi(s,q),\psi(s,q)]}{\partial q^{m-1}}\bigg|_{q=0} ds$$

$$y_m(t) = \chi_m y_{m-1}(t) + h_2 \int_0^t \frac{1}{(m-1)!} \frac{\partial^{m-1} A_2[\phi(s,q),\psi(s,q)]}{\partial q^{m-1}}\bigg|_{q=0} ds, \qquad (4.2)$$

dengan χ_m diberikan pada persamaan (3.7).

Misalkan penyelesaian pendekatan awal $x_0(t) = n_1 + t$ dan $y_0(t) = n_2 + t$, maka untuk $m = 1$ dan berdasarkan persamaan (4.2) diperoleh

$$x_1(t) = \frac{h_1}{6}[(6 - 6an_1 + 6cn_1n_2)t + (3c(n_1 + n_2) - 3a)t^2 + 2ct^3]$$

$$y_1(t) = \frac{h_2}{6}[(6 + 6en_2 - 6fn_1n_2)t + (3e - 3f(n_1 + n_2))t^2 - 2ft^3]. \qquad (4.3)$$

Jika proses dilanjutkan, maka diperoleh penyelesaian $x_3(t), x_4(t), x_5(t),...$ dan $y_3(t), y_4(t), y_5(t),...$ Jadi berdasarkan metode homotopi diperoleh penyelesaian pendekatan masalah taklinear persamaan (4.1) sebagai berikut

$$x(t) = x_0(t) + \sum_{m=1}^{\infty} x_m(t)$$

$$y(t) = y_0(t) + \sum_{m=1}^{\infty} y_m(t), \qquad (4.4)$$

dengan $x_m(t)$, $y_m(t)$, $m = 1,2,...$ diberikan pada persamaan (4.2).

Berikut ini diberikan kasus untuk penyelesaian masalah pada model Lotka–Volterra yang diberikan pada persamaan (4.1). Dalam kasus ini terdapat interaksi dua spesies antara spesies mangsa dan spesies pemangsa. Misalkan pada kondisi awal banyaknya mangsa $n_1 = 7$ dan banyaknya pemangsa $n_2 = 5$ dan dipilih laju kelahiran mangsa $a = 1$, tingkat interaksi antara mangsa dan pemangsa yang mengakibatkan berkurangnya mangsa $c = 0.1$, laju kematian pemangsa $e = 0.5$ dan tingkat interaksi antara pamangsa dan mangsa yang mengakibatkan bertambahnya pemangsa $f = 0.1$. Interpretasi fisis pada kasus ini adalah laju kelahiran mangsa sebesar satu unit per hari dan laju kematian pemangsa sebesar satu unit per dua hari, tingkat interaksi antara mangsa dan pemangsa yang mengakibatkan berkurangnya mangsa dalam sepuluh hari kemungkinan mangsa akan dimangsa sebesar satu unit dan tingkat interaksi antara pemangsa dan mangsa yang mengakibatkan pemangsa akan bertambah dalam sepuluh hari sebesar satu unit.

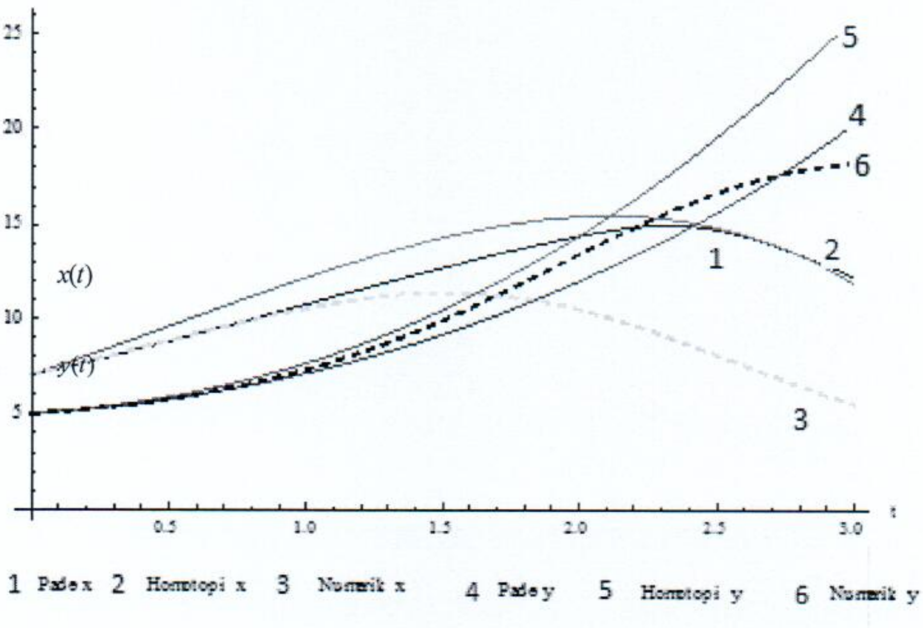
Penyelesaian persamaan (4.1) untuk kasus ini dengan menggunakan metode homotopi sampai suku yang keempat diperoleh dalam bentuk

$$x(t) = x_0(t) + x_1(t) + x_2(t) + x_3(t) + x_4(t)$$

$$y(t) = y_0(t) + y_1(t) + y_2(t) + y_3(t) + y_4(t), \tag{4.5}$$

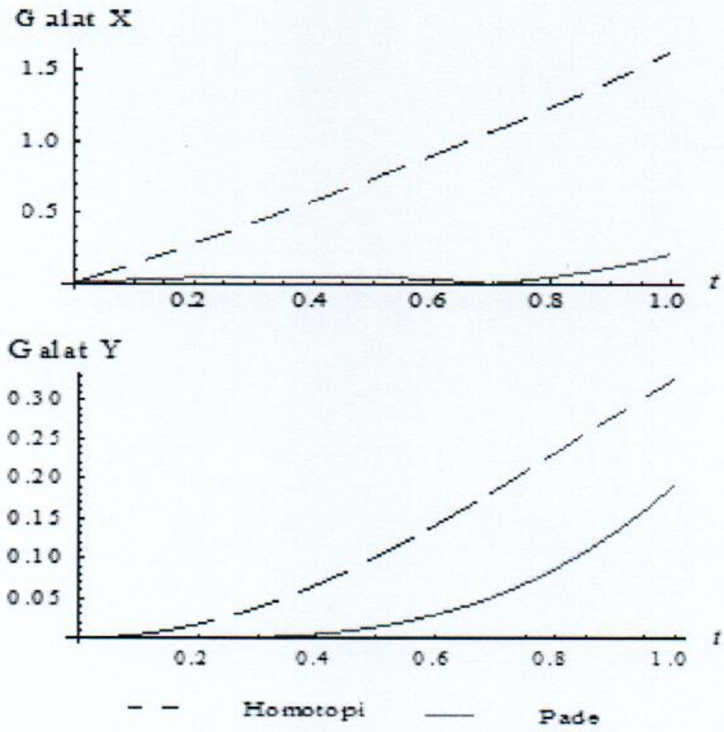
dengan $x_0(t) = n_1 + t$, $y_0(t) = n_2 + t$, dan $x_i(t)$, $y_i(t)$, $i = 1,2,3,4$ dihitung dengan bantuan *software* berbasis fungsional.

Grafik penyelesaian persamaan (4.1) untuk kasus ini dengan menggunakan metode homotopi dapat dilihat pada Gambar 1. Berdasarkan penyelesaian $x(t)$ dan $y(t)$ pada persamaan (4.5), maka penyelesaian dengan menggunakan metode homotopi Pade' dari persamaan (4.5) dengan koefisien p_k dan q_k diperoleh dengan bantuan *software* berbasis fungsional. Grafik penyelesaian dengan menggunakan metode homotopi Pade' dapat dilihat pada Gambar 1. Pada Gambar 1 juga diperlihatkan perbandingan antara penyelesaian pembanding masalah nilai awal (4.1) dengan penyelesaian menggunakan metode homotopi dan metode homotopi Pade'.



Gambar 1 Grafik penyelesaian masalah nilai awal (4.1)

Berdasarkan Gambar 1 penyelesaian dengan metode homotopi Pade' lebih mendekati penyelesaian pembanding, dengan daerah kekonvergenan yang lebih luas dibandingkan penyelesaian metode homotopi.



Gambar 2 Galat penyelesaian masalah nilai awal (4.1)

Dalam Gambar 2 diperoleh bahwa dengan metode homotopi Pade' memberikan daerah kekonvergenan yang luas dibandingkan pada metode homotopi. Hal ini terlihat pada galat yang muncul, dimana galat pada metode homotopi Pade' lebih kecil dibandingkan galat pada metode homotopi.

5 KESIMPULAN

Model Lotka–Volterra atau model mangsa-pemangsa merupakan model interaksi antar spesies mangsa dan spesies pemangsa pada sebuah lingkungan. Interaksi spesies tersebut memiliki peranan penting pada pertumbuhan populasi yang terus berubah secara dinamik seiring dengan perubahan populasi yang ada. Model Lotka–Volterra diselesaikan dengan menggunakan metode homotopi Pade'. Hasil penyelesaian dengan menggunakan metode homotopi Pade' dilakukan dengan menggunakan penyelesaian yang diperoleh dari metode homotopi. Dalam hal ini persamaan dari penyelesaian dengan metode homotopi diubah ke dalam bentuk fungsi rasional dengan koefisien–koefisien bergantung pada penyelesaian dengan metode homotopi. Keakuratan penyelesaian yang diperoleh dengan metode homotopi dan metode homotopi Pade' didasarkan pada banyaknya suku yang digunakan dari kedua metode tersebut. Semakin banyak suku yang digunakan, penyelesaiannya akan semakin mendekati penyelesaian pembanding. Selain itu, hasil perbandingan antara metode homotopi dan metode homotopi Pade' menunjukkan bahwa semakin banyak suku yang digunakan, metode homotopi Pade' lebih baik dari metode homotopi. Hal ini terlihat pada daerah kekonvergenan metode homotopi Pade' yang lebih luas dan galat yang dihasilkan lebih kecil. Metode homotopi Pade' mempunyai kelemahan berupa proses komputasi yang lama, karena metode homotopi Pade' penyelesaiannya berupa fungsi rasional yang diperoleh secara rekursif.

DAFTAR PUSTAKA

[1] **Biazar J**. 2005. A New Approach to the Solution of the Prey and Predator Problem and Comparison of the Result With Adomian Method. *Applied Mathematics and Computation.* 163:846–491.

[2] **Faghidian SA**. 2011. Application of Homotopy Pade' Technique to The Volterra's Prey and Predator Problem. *Appl.Comput Math.* 10:262–270.

[3] **Haberman R**. 2003. *Mathematical Models : Mechanical Vibration, population Dynamics and Traffic Flow, an Introduction to Applied Mathematics.* Prentice-Hall, USA.

[4] **Liao S**. 2004. *Beyond Perturbation : Introduction to The Homotopy Analysis Method.* Boca Raton, New York.

[5] **Rafei M**. 2007a. Variational Iteration Method for Solving the Epidemic Model and the Prey and Predator Problem. *Applied Mathematics and Computation*. 186:1701–1709.

[6] **Rafei M**. 2007b. Solution of the Prey and Predator Problem by Homotopy Perturbation Method. *Applied Mathematics and Computation*. 188:1419–1425.