

PENGGUNAAN METODE PERTURBASI HOMOTOPI UNTUK MENYELESAIKAN MASALAH ALIRAN FLUIDA SISKO PADA PIPA LURUS

ALDILLA, I¹⁾., JAHARUDDIN²⁾ , DAN SISWANDI²⁾

¹⁾Mahasiswa Program Studi Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Pertanian Bogor
JI Meranti, Kampus IPB Darmaga, Bogor 16680, Indonesia

²⁾Departemen Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Pertanian Bogor
JI Meranti, Kampus IPB Darmaga, Bogor 16680, Indonesia

Abstrak : Fluida Sisko merupakan fluida cair yang sering digunakan dalam proses industri. Model matematika untuk menjelaskan kecepatan aliran dan tegangan geser fluida Sisko diberikan dalam koordinat silinder dengan kecepatan partikel fluida hanya bergantung pada gerak melingkar sepanjang pipa. Model matematika yang diperoleh berupa masalah nilai batas yang bentuknya taklinear. Model ini diselesaikan dengan metode perturbasi homotopi. Berdasarkan metode ini, penyelesaian model matematika untuk fluida Sisko dinyatakan dalam bentuk deret pangkat terhadap jari-jari pada gerak melingkar. Perubahan kecepatan aliran dan tegangan geser fluida Sisko diberikan dalam bentuk grafik.

Kata kunci: metode perturbasi homotopi, fluida Sisko, dan koordinat silinder

1. PENDAHULUAN

Fluida Sisko merupakan salah satu jenis fluida non Newtonian karena perilakunya yang menyimpang dari hukum Newton. Fluida ini sulit mengalir dalam pipa tanpa adanya gaya yang diberikan. Permasalahan yang timbul akibat perilaku fluida Sisko tersebut akan menjadi permasalahan dalam proses industri. Secara umum fluida yang memenuhi hukum Newton disebut fluida

Newtonian di mana terdapat hubungan antara gaya yang bekerja dengan gerak yang disebabkan. Banyak jenis fluida yang bersifat Newtonian seperti air, beberapa jenis minyak dan berbagai jenis gas di mana kekentalannya tidak berubah terhadap waktu. Namun kemajuan teknologi telah membawa dampak terhadap fluida dengan ditandainya berbagai penyimpangan terhadap hukum Newton yang mengakibatkan fluida Newtonian jarang digunakan dalam proses industri. Kebanyakan fluida yang terdapat di alam tidak bersifat Newtonian tetapi bersifat non Newtonian seperti cat, tinta, minyak pelumas, lumpur, dan sebagainya yang banyak digunakan pada bidang industri. Tegangan geser dan regangan geser fluida Sisko memiliki hubungan linier. Hal ini berarti bahwa fluida Sisko akan mengalir seperti air pada saat mencapai regangan geser tertentu. Contoh nyata dari fluida Sisko adalah lumpur. Pada beberapa kasus fluida ini digunakan dalam proses pengeboran yang dipompakan dari permukaan melalui pipa bor menuju mata bor dan kemudian kembali ke permukaan melalui *Annulus* (celah antara pipa bor dengan lubang sumur).

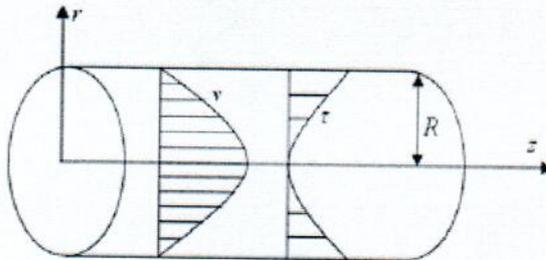
Model persamaan bagi gerak aliran fluida non Newtonian berupa persamaan differensial taklinear, dimana penyelesaian eksaknya sulit diperoleh dengan metode-metode standar. Dalam tulisan ini dibahas penyelesaian persamaan fluida Sisko untuk mengetahui perilaku fluida Sisko dalam pipa lurus dengan menggunakan metode perturbasi homotopi yang diperkenalkan oleh He (2000) dalam [2].

2. MODEL PERSAMAAN

Berikut ini dibahas model matematika pada masalah aliran fluida melalui pipa lurus dalam sistem koordinat silinder [1]. Diasumsikan bahwa fluida yang ditinjau memiliki aliran pada pipa dalam keadaan tunak, aliran fluida merupakan aliran laminar dan seragam, gaya gravitasi diabaikan, dan aliran fluida hanya dalam arah sumbu- z . Misalkan pula kecepatan aliran fluida hanya bergantung pada kecepatan fluida dalam arah sumbu- z , yaitu

$$V = V(0, 0, v(r))$$

dengan $v(r)$ kecepatan fluida dalam arah sumbu- z yang hanya bergantung pada r . Domain fluida yang ditinjau diberikan oleh Gambar 1 dengan r dan z masing-masing sumbu vertikal dan horizontal.



Gambar 1 Domain fluida dengan kecepatan hanya dalam arah- z .

Berdasarkan [3], fluida Sisko memiliki tegangan geser S sebagai berikut: $S = -PE + \tau$ dengan P tekanan, E tegangan identitas, dan τ tegangan geser

tambahan. Tegangan geser τ adalah tambahan tegangan yang terjadi pada aliran fluida Sisko yang didefinisikan dalam koordinat silinder sebagai berikut:

$$\tau = m \frac{dv}{dr} - \eta \left(-\frac{dv}{dr} \right)^n \quad (2.1)$$

Besaran n , m , dan η merupakan parameter-parameter yang bergantung pada jenis fluida yang ditinjau.

Model matematika bagi kecepatan aliran fluida Sisko pada pipa lurus dinyatakan oleh masalah nilai batas berikut:

$$m \frac{d^2v}{dr^2} + \eta n \left(-\frac{dv}{dr} \right)^{n-1} \frac{d^2v}{dr^2} + \frac{1}{r} \left(m \frac{dv}{dr} - \eta \left(-\frac{dv}{dr} \right)^n \right) - \frac{dP}{dz} = 0 \quad (2.2)$$

dengan syarat batas

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dr} &= 0, \text{ di } r = 0 \\ v &= 0, \text{ di } r = R. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Persamaan (2.1) dan masalah nilai batas pada persamaan (2.2)-(2.3) masih berupa variabel fisis. Oleh karena itu, perlu dilakukan penondimensionalan. Definisikan variabel tak berdimensi sebagai berikut :

$$r^* = \frac{r}{R}, \quad v^* = \frac{v}{u}, \quad \zeta = \frac{\bar{\mu}}{m}, \quad z^* = \frac{z}{R}, \quad \bar{\mu} = \eta \left(\frac{\bar{u}}{R} \right)^{n-1}.$$

Besaran $\bar{\mu}$ menyatakan rasio antara rata-rata kecepatan fluida pada pipa (\bar{u}) dengan jari-jari pipa R . Jika variabel non dimensional di atas digunakan dan tanda (*) diabaikan, maka masalah nilai batas pada persamaan (2.2) dan (2.3) menjadi:

$$\frac{d^2v}{dr^2} + n\zeta \left(-\frac{dv}{dr} \right)^{n-1} \frac{d^2v}{dr^2} + \frac{1}{r} \left(\frac{dv}{dr} - \zeta \left(-\frac{dv}{dr} \right)^n \right) + 2P_s = 0 \quad (2.4)$$

dengan syarat batas

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dr} &= 0, \text{ di } r = 0 \\ v &= 0, \text{ di } r = 1 \end{aligned} \quad (2.5)$$

dimana P_s adalah tekanan dalam kondisi kesetimbangan dan memenuhi persamaan berikut:

$$\frac{dP}{dz} = -\frac{2m\bar{u}}{R^2} P_s.$$

Persamaan (2.4) dan (2.5) merupakan model matematika untuk kecepatan aliran fluida Sisko dalam pipa yang dipengaruhi oleh jari-jari penampang pipa r , tekanan kesetimbangan P_s , parameter pencampuran fluida n , dan viskositas fluida ζ . Berdasarkan penyelesaian dari masalah nilai batas (2.4)-(2.5) selanjutnya ditentukan tegangan geser τ berdasarkan persamaan tegangan geser tak berdimensi berikut:

$$\tau = \frac{dv}{dr} - \zeta \left(-\frac{dv}{dr} \right)^n. \quad (2.6)$$

Pendekatan dari penyelesaian masalah nilai batas (2.4) dan (2.5) akan ditentukan dengan menggunakan metode perturbasi homotopi.

3. ANALISIS METODE

Berikut ini dibahas konsep dasar metode perturbasi homotopi. Untuk itu, tinjau sistem persamaan diferensial berikut:

$$N[v(r)] = 0 \quad (3.1)$$

dengan N suatu operator turunan dan $v(r)$ fungsi yang akan ditentukan. Misalkan fungsi homotopi H dinyatakan sebagai berikut:

$$H(\phi, p) = (1-p)L(\phi(r, p) - v_0) + pN[\phi(r, p)] \quad (3.2)$$

dengan L operator linear, dan ϕ suatu fungsi yang bergantung pada parameter p , dan v_0 merupakan pendekatan awal yang berkaitan dengan syarat awal $v(r, 0)$. Selanjutnya, misalkan fungsi ϕ merupakan penyelesaian dari persamaan berikut: $H(\phi, p) = 0$ atau

$$(1-p)L(\phi(r, p) - v_0) + pN[\phi(r, p)] = 0 \quad (3.3)$$

Berdasarkan persamaan (3.2), maka untuk $p = 0$ dan $p = 1$ masing-masing memberikan persamaan berikut:

$$H(\phi, 0) = L(\phi(r, p) - v_0) \quad \text{dan} \quad H(\phi, 1) = N[\phi(r, p)]$$

Berdasarkan persamaan (3.1) dan sifat operator linear L , maka penyelesaian dari persamaan $H(\phi, 0) = 0$ dan $H(\phi, 1) = 0$ masing-masing adalah

$$v_0(r) = \phi(r, 0) \quad \text{dan} \quad v(r) = \phi(r, 1)$$

Hasil ini menunjukkan bahwa fungsi $\phi(x, 0)$ merupakan pendekatan analitik dari penyelesaian eksak $v(r)$ dari persamaan (3.1).

Dalam metode perturbasi homotopi, fungsi $\phi(x, p, h)$ dimisalkan dalam bentuk deret berikut:

$$\phi(r, p) = v_0 + \sum_{m=1}^{\infty} v_m p^m$$

yang merupakan penyelesaian dari persamaan (3.3). Fungsi v_m , $m = 1, 2, 3, \dots$ diperoleh dari persamaan (3.3).

4. APLIKASI PADA MODEL PERSAMAAN FLUIDA SSKO

Berdasarkan model persamaan bagi aliran fluida Sisko yang diberikan pada persamaan (2.4), maka penggunaan metode perturbasi homotopi memerlukan pemilihan operator linear L dan operator tak linear N sebagai berikut:

$$L(\phi) = \frac{d^2\phi}{dr^2}$$

dan

$$N(\phi) = \frac{d^2\phi}{dr^2} + n\zeta \left(-\frac{d\phi}{dr} \right)^{n-1} \frac{d^2\phi}{dr^2} + \frac{1}{r} \left(\frac{d\phi}{dr} - \zeta \left(-\frac{d\phi}{dr} \right)^n \right) + 2P_s$$

Berdasarkan pemilihan operator L dan N di atas, maka persamaan (3.3) memberikan persamaan berikut:

$$(1-p) \left(\frac{d^2v}{dr^2} - \frac{d^2u_0}{dr^2} \right) + p \left[\frac{d^2v}{dr^2} + n\zeta \left(-\frac{d\phi}{dr} \right)^{n-1} \frac{d^2\phi}{dr^2} + \frac{1}{r} \left(\frac{d\phi}{dr} - \zeta \left(-\frac{d\phi}{dr} \right)^n \right) + 2P_s \right] = 0 \tag{4.1}$$

Misalkan penyelesaian dari persamaan (4.1) dinyatakan dalam bentuk deret:

$$\phi(r, p) = v_0 + pv_1 + p^2v_2 + \dots \tag{4.2}$$

Jika persamaan (4.2) disubstitusi ke dalam persamaan (4.1) dan (2.5), kemudian memisahkan perpangkatan dari p , maka koefisien p memberikan persamaan berikut:

$$\frac{d^2v_1}{dr^2} + \frac{d^2u_0}{dr^2} + n\zeta \left(-\frac{dv_0}{dr} \right)^{n-1} \frac{d^2v_0}{dr^2} + \frac{1}{r} \left(\frac{dv_0}{dr} - \zeta \left(-\frac{dv_0}{dr} \right)^n \right) + 2P_s = 0. \tag{4.3}$$

dengan syarat awal:

$$\begin{aligned} \frac{dv_1}{dr} &= 0, \text{ di } r = 0 \\ v_1 &= 0, \text{ di } r = 1. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Selanjutnya, koefisien p^2 memberikan persamaan berikut:

$$\begin{aligned} \frac{d^2v_2}{dr^2} + n\zeta(-1)^{n-1} \left[\left(\frac{dv_0}{dr} \right)^{n-1} \frac{d^2v_1}{dr^2} + (n-1) \left(\frac{dv_0}{dr} \right)^{n-2} \frac{dv_1}{dr} \frac{d^2v_1}{dr^2} \right] \\ + \frac{1}{r} \left[\frac{dv_1}{dr} - n\zeta(-1)^n \left(\frac{dv_0}{dr} \right)^{n-1} \frac{dv_1}{dr} \right] = 0. \end{aligned} \tag{4.5}$$

dengan syarat awal:

$$\begin{aligned} \frac{dv_2}{dr} &= 0, \text{ di } r = 0 \\ v_2 &= 0, \text{ di } r = 1. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Sebagai pendekatan awal, dipilih

$$v_0 = \frac{P_s}{2}(1-r^2).$$

maka penyelesaian masalah nilai batas (4.3)-(4.4), dan masalah nilai batas (4.5)-(4.6) masing-masing adalah:

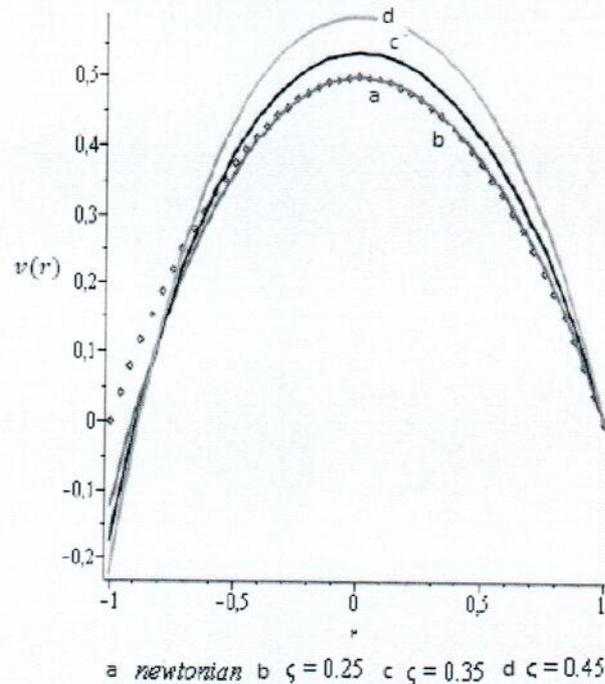
$$\begin{aligned} v_1 &= -\frac{P_s^n \zeta}{n} (1-r^{n+1}) \\ v_2 &= \frac{P_s^{2n-1} \zeta^2 (2n^2 + 2n)}{(2n-1)2n} (1-r^{2n}) + \frac{P_s^n \zeta}{n^2} (1-r^{n+1}). \end{aligned}$$

Jika proses di atas dilanjutkan, maka diperoleh v_3, v_4, \dots, v_M . Dengan demikian penyelesaian dari masalah nilai batas (2.4)-(2.5) dengan metode perturbasi homotopi hingga orde M dinyatakan dalam bentuk deret berikut:

$$v(r) = v_0(r) + v_1(r) + v_2(r) + \dots + v_M(r). \quad (4.7)$$

Untuk lebih jelasnya, maka pada bagian berikut dibahas suatu kasus pada masalah aliran fluida Sisko pada pipa lurus untuk menggambarkan profil kecepatan dan tegangan geser aliran fluida Sisko tersebut.

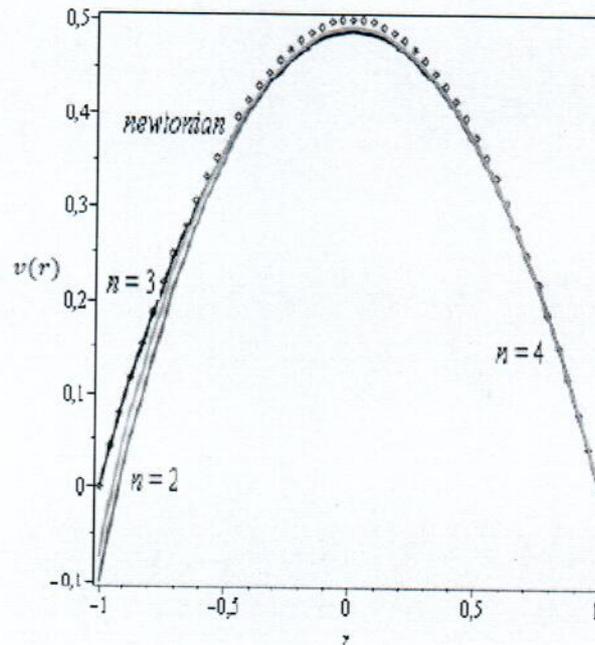
Kecepatan Aliran: Perubahan kecepatan fluida di dalam pipa dipengaruhi oleh nilai viskositas dan parameter pencampuran fluida. Gambar 2 dan Gambar 3 menunjukkan grafik kecepatan aliran v terhadap jarak dari pusat pipa ke partikel fluida r . Berdasarkan kedua gambar tersebut, besarnya kecepatan aliran fluida pada suatu pipa akan mendekati nol pada dinding pipa dan kecepatan akan mencapai maksimum pada tengah-tengah pipa.



Gambar 2 Kecepatan fluida Newtonian dan fluida Sisko untuk ζ berbeda

Gambar 2 menunjukkan perubahan kecepatan partikel fluida dalam pipa terhadap r untuk nilai viskositas ζ dalam cairan yang berbeda. Kecepatan partikel fluida Newtonian dengan nilai viskositas ($\zeta = 0$) dalam kasus pencampuran dua fluida yang berbeda ($n = 2$) bergerak dari dinding pipa $r = -1$, ke dinding pipa $r = 1$. Pada $r = -1$, kecepatan partikel fluida Newtonian adalah nol dan saat mencapai pusat pipa, maka kecepatan aliran maksimum yaitu 0.5 satuan kecepatan. Namun untuk partikel fluida Sisko dengan kenaikan nilai viskositas yaitu $\zeta = 0,25$, $\zeta = 0,35$, dan $\zeta = 0,45$ kecepatan aliran bergerak dari $r = -1$ ke $r = 1$ masing-masing memberikan kecepatan sebesar -0.14, -0.18 dan -0.22 dan kecepatan maksimum masing-masing dicapai sebesar 0.5, 0.54

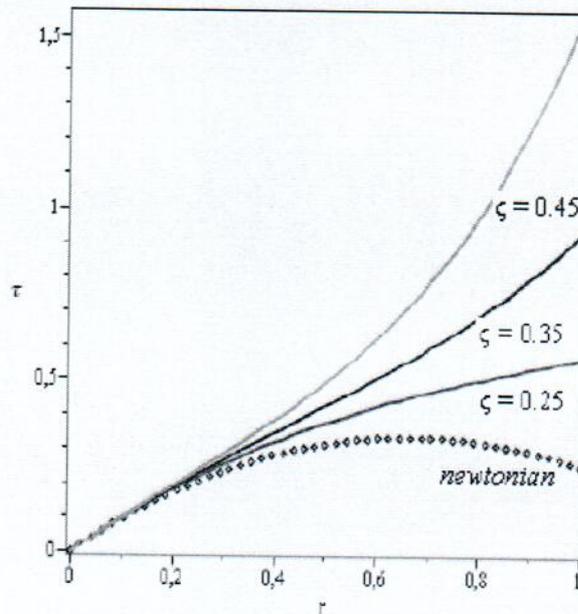
dan 0.59. Hal ini dikarenakan gaya gesekan yang diberikan oleh pipa pada partikel fluida Sisko dan gaya gesekan yang diberikan oleh campuran fluida yang bergerak dengan kecepatan berbeda sehingga kecepatan partikel fluida Sisko tidak konstan di sepanjang dinding pipa. Dapat diamati bahwa dengan meningkatnya viskositas ζ pada fluida Sisko, kecepatan partikel fluida Sisko menjadi lebih kecil dari partikel fluida Newtonian. Namun saat mencapai pusat pipa kecepatan aliran fluida Sisko menjadi lebih besar dan semakin menjauhi fluida Newtonian.



Gambar 3 Kecepatan fluida Newtonian dan fluida Sisko untuk n berbeda

Gambar 3 menunjukkan perubahan kecepatan fluida dalam pipa terhadap parameter pencampuran fluida n dalam cairan yang berbeda. Kecepatan partikel fluida Newtonian dengan pencampuran dua fluida dalam pipa sama seperti kecepatan aliran pada Gambar 2. Namun untuk partikel fluida Sisko dengan nilai viskositas ($\zeta = 0,2$), kecepatan aliran bergerak dari dinding pipa $r = -1$, ke dinding pipa $r = 1$ dengan kecepatan $-0,1$ dan saat mencapai pusat pipa, kecepatan aliran maksimum dicapai sebesar 0.49 satuan kecepatan. Untuk partikel fluida Sisko dengan parameter pencampuran tiga fluida yang berbeda ($n = 3$), kecepatan aliran bergerak dari dinding pipa $r = -1$, ke dinding pipa $r = 1$ dengan kecepatan nol dan saat mencapai pusat pipa, kecepatan aliran maksimumnya adalah 0.49 satuan kecepatan. Untuk partikel fluida Sisko dengan parameter pencampuran empat fluida yang berbeda ($n = 4$), aliran bergerak dari dinding pipa $r = -1$, ke dinding pipa $r = 1$ dengan kecepatan $-0,12$ dan saat mencapai pusat pipa, kecepatan aliran maksimumnya adalah 0.495 satuan kecepatan. Hal ini menunjukkan bahwa dengan semakin banyaknya pencampuran fluida pada partikel fluida Sisko, maka kecepatan partikel fluida Sisko semakin mendekati kecepatan partikel fluida Newtonian

Tegangan Geser: Tegangan geser terjadi karena adanya pergerakan relatif antar partikel-partikel fluida sehingga dengan kecepatan aliran yang berbeda-beda pada setiap titikanya, tegangan geser yang terjadi pun berbeda-beda. Berikut ini akan dibandingkan perubahan tegangan geser pada fluida Newtonian dan fluida Sisko terhadap viskositas fluida ζ dan parameter pencampuran fluida n .

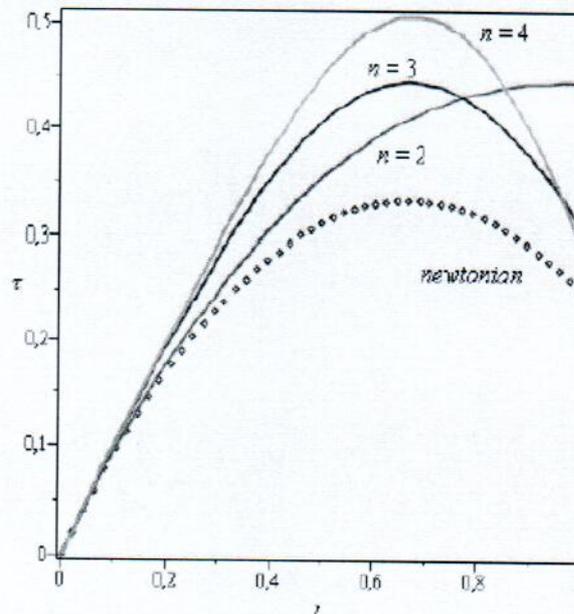


Gambar 4 Tegangan geser fluida Newtonian dan fluida Sisko untuk ζ berbeda

Gambar 4 menunjukkan perubahan tegangan geser partikel fluida dalam pipa terhadap viskositas ζ dalam cairan yang berbeda. Tegangan geser partikel fluida Newtonian dan fluida Sisko bergerak dari pusat pipa $r = 0$ ke dinding pipa $r = 1$. Besarnya tegangan geser pada partikel fluida Newtonian ($\zeta = 0$) dalam kasus pencampuran dua fluida yang berbeda ($n = 2$) adalah nol pada pusat pipa. Jika partikel fluida menjauhi pusat pipa, maka tegangan geser akan meningkat dan mencapai maksimum pada jarak 0,7 dari pusat pipa. Untuk partikel fluida Sisko dengan peningkatan viskositas yaitu $\zeta = 0,25$, $\zeta = 0,35$, dan $\zeta = 0,45$, diperoleh bahwa tegangan geser semakin besar saat menuju dinding pipa. Ini menunjukkan bahwa semakin tinggi gaya viskositas yang diberikan oleh pipa akan memperbesar tegangan geser fluida Sisko dari pusat pipa ke dinding pipa.

Gambar 5 menunjukkan perubahan tegangan geser terhadap parameter pencampuran fluida n . Untuk partikel fluida Newtonian pergerakan tegangan geser sama seperti tegangan geser pada Gambar 4. Untuk partikel fluida Sisko dengan parameter pencampuran tiga fluida yang berbeda ($n = 3$) dan empat fluida yang berbeda ($n = 4$), tegangan geser mencapai maksimum saat berada pada jarak 0,7 dari pusat pipa. Nilai ini akan menjauhi tegangan geser partikel fluida Newtonian dan semakin mengecil saat menuju dinding pipa. Namun untuk partikel fluida Sisko dengan parameter pencampuran dua fluida yang berbeda ($n = 2$), tegangan geser mencapai maksimum pada dinding pipa. Dapat dilihat bahwa apabila semakin banyak pencampuran fluida pada partikel fluida

Sisko, maka tegangan geser partikel fluida Sisko memiliki batas maksimum yang berbeda-beda namun lebih besar dari tegangan geser partikel fluida Newtonian.



Gambar 5 Tegangan geser fluida Newtonian dan fluida Sisko untuk n berbeda

5 KESIMPULAN

Aliran fluida Sisko yang ditinjau diasumsikan berupa aliran fluida yang tunak, laminar dan seragam. Masalah aliran fluida Sisko pada pipa lurus diselesaikan dengan metode perturbasi homotopi. Penggunaan metode perturbasi homotopi untuk menyelesaikan model fluida Sisko pada suatu aliran dalam pipa lurus ternyata sederhana, karena hanya melibatkan pengintegralan biasa. Berdasarkan metode perturbasi homotopi diperoleh bahwa semakin tinggi orde yang digunakan semakin terlihat perilaku fluida Sisko yang sebenarnya dalam pipa. Bentuk kecepatan dan tegangan geser fluida Sisko terhadap viskositas dan parameter pencampuran fluida pada pipa lurus digambarkan berdasarkan penyelesaian masalah aliran fluida Sisko. Berdasarkan grafik kecepatan dan tegangan geser fluida Sisko diperoleh bahwa besarnya kecepatan aliran fluida pada pipa akan mendekati nol pada dinding pipa dan kecepatan aliran akan mencapai maksimum pada pusat pipa. Sebaliknya, besarnya tegangan geser fluida pada pipa akan mendekati nol pada pusat pipa dan tegangan geser akan mencapai maksimum pada dinding pipa.

Selain itu, semakin besar viskositas pada fluida Sisko, nilai kecepatan maksimum fluida Sisko menjadi lebih besar dibandingkan dengan nilai kecepatan maksimum untuk fluida Newtonian dan tegangan geser fluida Sisko menjadi lebih besar dibandingkan dengan tegangan geser fluida Newtonian. Sebaliknya semakin besar parameter pencampuran fluida pada fluida Sisko, nilai kecepatan maksimum fluida Sisko menjadi lebih kecil dibandingkan

dengan nilai kecepatan maksimum untuk fluida Newtonian dan tegangan geser fluida Sisko menjadi lebih besar dibandingkan dengan tegangan geser fluida Newtonian.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] **Faber TE.** 1995. *Fluid Dynamics for Physicists*. Cambridge Univ. Press. London.
- [2] **He JH.** 2000. A coupling method of homotopy technique and perturbation technique for nonlinear problems. *International Journal Nonlinear Mechanic.*, Vol.35, No.1:37-43.
- [3] **Khan M, Munawar S, Abbasbandy S.** 2010. Steady Flow and Heat Transfer of a Sisko Fluid In Annular Pipe (*Journal of Heat and Mass Transfer*). 53: 10 1290-1297. Departmen of Mathematics, Pakistan.