PERSAMAAN BENJAMIN-ONO ORDE TINGGI UNTUK MENGGAMBARKAN GERAK GELOMBANG INTERNAL PADA FLUIDA DALAM

JAHARUDDIN

Departemen Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam,
Institut Pertanian Bogor
Jl. Meranti, Kampus IPB Dramaga, Bogor, Indonesia

ABSTRAK: Penurunan persamaan gerak gelombang internal pada fluida dengan kedalaman yang cukup besar (persamaan Benjamin-Ono) dilakukan dengan menggunakan metode asimtotik. Dalam hal ini, peubah simpangan gelombang internal diuraikan secara asimtotik terhadap suatu parameter yang menugukr amplitudo gelombang. Analisis asimtotik dilakukan hingga orde yang tinggi, dan diperoleh suatu persamaan gerak yang merupakan persamaan Benjamin-Ono tetapi dengan orde yang tinggi.

Kata Kunci: Persamaan BO, Metode Asimtotik

1. Pendahuluan

Dalam tulisan ini diturunkan persamaan gerak gelombang internal dalam fluida dengan rapat massa yang kontinu terhadap kedalaman. Persamaan gerak tersebut diturunkan dari persamaan pengatur untuk fluida ideal. Penurunan persamaan gerak tersebut mengasumsikan bahwa rapat massa fluida berubah secara kontinu sampai pada kedalaman tertentu dan selanjutnya rapat massanya hampir konstan.

Benney (1966)[1] menunjukkan bahwa komponen vertikal dari kecepatan w di batas antara dua fluida diperoleh dalam bentuk $w = \eta_x$. Untuk fluida dangkal, η memenuhi persamaan Korteweg-de Vries (KdV)

$$\eta_t + c\eta_x + \mu\eta\eta_x + \delta\eta_{xxx} = 0. \tag{1.1}$$

Koefisien μ dan δ bergantung pada $\rho_o(z)$, sedangkan c merupakan kecepatan phase gelombang. Untuk kasus fluida dalam, Ono (1975)[4] memperoleh persamaan untuk η sebagai

$$\eta_t + c\eta_x + \bar{\mu}\eta\eta_x - \bar{\delta}H(\eta_{xx}) = 0 \tag{1.2}$$

dengan $\bar{\mu}$ dan $\bar{\delta}$ merupakan koefisien persamaan BO yang bergantung pada $\rho_o(z)$ dan $\mathcal{H}$ notasi untuk transformasi Hilbert yang berbentuk

$$H(\eta) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\eta(s,t)}{s-x} ds.$$

Persamaan ILW yang dihasilkan oleh Kubota, Ko, dan Dobbs (1978)[3] berbentuk

$$\eta_t + c\eta_x + \bar{\mu}\eta\eta_x + \bar{\delta}L(\eta_x) = 0 \tag{1.3}$$

dengan L suatu operator. Untuk kedalaman yang sangat besar $L(\eta_x)$ menjadi $-H(\eta_{xx})$. Persamaan-persamaan gerak yang dirumuskan di atas diperoleh dengan menggunakan metode asimtotik pada peubah Euler u dan w. Dalam observasi-observasi mengenai gelombang internal di laut dan di atmosfir, yang teramati adalah isopycnal yang merupakan peubah Lagrange. Isopycnal adalah tempat kedudukan partikel-partikel fluida yang memiliki rapat massa yang sama. Dalam tulisan ini, penurunan persamaan gerak gelombang internal untuk fluida dalam (persamaan BO) dilakukan dengan cara yang sama dalam penurunan persamaan KdV dengan memakai peubah Lagrange dan mengikuti alur yang dilakukan oleh Grimshaw, Pelinovsky, dan Polokhina (2001)[2].

2. Formulasi Lagrange

Dalam bagian ini diturunkan persamaan pengatur dalam formulasi Lagrange dari persamaan pengatur dalam formulasi Euler untuk fluida ideal. Persamaan pengatur dalam formulasi Euler untuk fluida ideal diberikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \rho_t + u\rho_x + w\rho_z &= 0, \\ u_x + w_z &= 0, \\ \rho(u_t + uu_x + wu_z) + p_x &= 0, \\ \rho(w_t + uw_x + ww_z) + p_z + \rho g &= 0 \end{aligned} \tag{2.1}$$

pada seluruh domain fluida dan syarat batasnya berbentuk

$$\begin{aligned} w &= 0 && \text{di} \quad z = -h, \\ \eta_{bt} + u\eta_{bx} &= w && \text{di} \quad z = \eta_b(x,t), \\ p &= 0 && \text{di} \quad z = \eta_o(x,t). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Misalkan simpangan vertikal partikel fluida dari posisi kesetimbangannya dinotasikan oleh $\zeta(x,z,t)$, maka

$$w = \frac{D\zeta}{Dt}. \tag{2.3}$$

Rapat massa fluida sebagai akibat dari perpindahan partikel fluida dari posisi kesetimbangannya ke dalam keadaan terganggu, menjadi

$$\rho(x,z,t) = \rho_o\left(z - \zeta(x,z,t)\right) \tag{2.4}$$

dan tekanan p dinyatakan dalam bentuk

$$p(x, z, t) = p_o(z) + q(x, z, t)$$

dengan $p_o(z)$ menyatakan tekanan pada keadaan setimbang yang dalam keadaan hidrostatik $p_{oz} = -g\rho_o$.

Selanjutnya, apabila Z menyatakan posisi vertikal partikel fluida pada keadaan setimbang, maka berdasarkan Persamaan (2.4), permukaan isopycnal, yaitu $\rho(x, z, t) =$ konstan, dinyatakan sebagai

$$z = Z + \zeta(x, z, t). \tag{2.5}$$

Peubah bebas Z merupakan peubah Lagrange. Jika dituliskan $\zeta(x, z, t) = \xi(x, Z, t)$, $u(x, z, t) = U(x, Z, t)$, $w(x, z, t) = W(x, Z, t)$ dan $q(x, z, t) = Q(x, Z, t)$, maka Persamaan pengatur (2.1) menjadi

$$\begin{aligned} U_x + W_Z - \frac{1}{1+\xi_Z}(U_Z\xi_x + W_Z\xi_Z) &= 0, \\ \rho_o(Z)(U_t + UU_x) + Q_x - \frac{1}{1+\xi_Z}Q_Z\xi_x &= 0, \quad (2.6) \\ \rho_o(Z)(W_t + UW_x) + \frac{1}{1+\xi_Z}Q_Z + g(\rho_o(Z) - \rho_o(Z+\xi)) &= 0. \end{aligned}$$

Syarat batas (2.2) menjadi

$$\begin{aligned} \xi &= 0 & \text{di} \quad & Z = -h, \\ \int_0^{\xi} g\rho_o(z)dz &= Q(x, Z, t) & \text{di} \quad & Z = 0. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Jika Q dieliminasikan dari (2.6), maka dengan menggunakan W dalam (**??**), diperoleh persamaan berikut

$$\begin{aligned} (1+\xi_Z)U_x + (\partial_t + U\partial_x)\xi_Z &= 0 \\ (\rho_o(U_t + UU_x))_Z + \xi_x\left(\rho_o(\partial_t + U\partial_x)^2\xi\right)_Z - & \\ (1+\xi_Z)\left(\rho_o(\partial_t + U\partial_x)^2\xi\right)_x + g\rho_{oZ}\xi_x &= 0 \end{aligned} \tag{2.8}$$

dan Syarat batas (2.7) menjadi

$$\begin{aligned} \xi &= 0 & \text{di} \quad & Z = -h, \\ g\xi_x &= -(U_t + UU_x) - \xi_x(\partial_t + U\partial_x)^2\xi & \text{di} \quad & Z = 0. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Persamaan (2.8) dengan Syarat batas (2.9) adalah persamaan pengatur dalam bentuk formulasi Lagrange untuk fluida ideal.

Untuk menyelesaikan Persamaan (2.8) dengan Syarat batas (2.9) secara analitis, diperlukan beberapa asumsi berikut:

1. Gelombang mempunyai panjang gelombang yang cukup panjang dan pengamatan dilakukan untuk waktu yang cukup lama. Pengertian panjang dan lama didasarkan pada pemilihan suatu parameter ϵ sehingga peubah fisis x dan t dapat dituliskan dalam peubah yang baru $X = \epsilon x$ dan $\tilde{T} = \epsilon t$.
2. Gelombang internal yang ditinjau merambat hanya secara horizontal dalam satu arah dengan koordinat berjalan $\theta = X - c\tilde{T}$.
3. Amplitudo gelombang yang ditinjau cukup kecil, misalkan berorde α. Jika amplitudo gelombang a dengan peubah waktu $\tilde{T}$, maka diasumsikan amplitudo $\bar{a} = \alpha a$ dengan peubah waktu $\tau = \alpha\tilde{T}$.

Berdasarkan asumsi-asumsi di atas, Persamaan (2.8) menjadi

$$\left(c^2\rho_o\xi_{\theta Z}\right)_Z + \rho_o N^2\xi_\theta = G, \qquad -h < Z < 0 \tag{2.10}$$

dengan $G = -\left(c\rho_o F_2\right)_Z - F_1$ dan $N^2(Z) = -g\rho_{oZ}/\rho_o$, sedangkan Syarat batas (2.9) menjadi

$$\begin{aligned} \xi &= 0 && \text{di} \quad Z = -h, \\ g\xi_\theta &= c^2\xi_{\theta Z} + cF_2 + F_4 && \text{di} \quad Z = 0 \end{aligned} \tag{2.11}$$

dengan $F_4 = -(\alpha U_\tau + UU_\theta + \epsilon^2\xi_\theta F_3)$.

Selanjutnya dengan metode asimtotik akan ditentukan penyelesaian Persamaan (2.10) dengan Syarat batas (2.11) pada fluida dalam. Berdasarkan asumsi (3), $\xi = O(\alpha)$. Bentuk linear Persamaan (2.9) memberikan $U - U_o = O(\alpha)$. Untuk itu, uraian asimtotik ξ dan U terhadap α dituliskan sebagai:

$$\begin{aligned} \xi &= \alpha\xi_1 + \alpha^2\xi_2 + \cdots \\ U &= U_o(Z) + \alpha U_1 + \alpha^2 U_2 + \cdots \end{aligned} \tag{2.12}$$

dengan $U_o(Z)$ kecepatan arus dalam arah horizontal pada keadaan setimbang.

3. Persamaan Gerak Gelombang Internal

3.1. **Persamaan BO orde rendah.** Untuk lapisan atas, yaitu $-h_o < Z \leq 0$, substitusi Uraian asimtotik (2.12) ke dalam Persamaan (2.10) dan ke dalam Syarat batas (2.11) di $Z = 0$. Kemudian gunakan keseimbangan α dan ϵ ($\alpha = \epsilon$, hubungan ini yang membedakan dengan penurunan persamaan KdV) dan bentuk $\xi_1 = A\phi$; koefisien α menghasilkan masalah nilai batas untuk ϕ berikut

$$\begin{aligned} \left(\rho_o(U_o - c)^2\phi_Z\right)_Z + \rho_o N^2\phi &= 0, \ -h_o < Z < 0, \\ (U_o - c)^2\phi_Z - g\phi &= 0 \qquad \text{di} \quad Z = 0. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Untuk orde selanjutnya, koefisien α^2 memberikan masalah nilai batas untuk ξ_2 berikut

$$\begin{aligned} \left(\rho_o(U_o - c)^2\xi_{2\theta Z}\right)_Z + \rho_o N^2\xi_{2\theta} &= F, \qquad -h_o < Z < 0, \\ (U_o - c)^2\xi_{2\theta Z} - g\xi_{2\theta} &= M \qquad \text{di} \quad Z = 0 \end{aligned} \tag{3.2}$$

dengan

$$\begin{aligned} F &= -2\left(\rho_o(U_o-c)\phi_Z\right)_Z A_\tau + 3\left(\rho_o(U_o-c)^2\phi_Z^2\right)_Z AA_\theta, \\ M &= -2(U_o-c)\phi_Z A_\tau + 3(U_o-c)^2\phi_Z^2 AA_\theta. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Syarat keterselesaian bagi Masalah nilai batas (3.2) adalah

$$\int_{-h_o}^{0} F\phi dZ = \rho_o(U_o-c)^2(\xi_{2\theta}\phi_Z - \xi_{2\theta Z}\phi)\,\Big|_{Z=-h_o}^{Z=0} \tag{3.4}$$

dengan ϕ dan ξ_2 berturut-turut penyelesaian Masalah nilai batas (3.1) dan (3.2). Karena suku-suku ruas kanan Persamaan (3.4) di $Z=-h_o$ belum diketahui, maka akan ditentukan nilai-nilai ϕ dan $\xi_{2\theta}$ beserta turunannya terhadap Z di $Z=-h_o$ dengan menggunakan hasil fluida di lapisan bawah.

Pada lapisan bawah, yaitu $-h \le Z < -h_o$, dimisalkan $\xi = \alpha\bar{\xi}(\theta,\bar{Z},\tau)$ dengan $\bar{Z}=\epsilon Z$, rapat massa $\rho_o(z)=\rho_\infty$ yang diasumsikan konstan dan $U_o=0$. Peubah-peubah di lapisan bawah ditandai dengan garis atas $(\bar{\cdot})$. Jika semua ini disubstitusi ke Persamaan (2.10) dan Syarat batas (2.11) di $Z=-h$, maka koefisien α menghasilkan masalah nilai batas

$$\begin{aligned} \bar{\xi}_{\theta\theta\theta} + \bar{\xi}_{\bar{Z}\bar{Z}\theta} &= 0, && -\alpha h < \bar{Z} < -\alpha h_o, \\ \bar{\xi}_\theta(\theta,\bar{Z},\tau) &= 0 && \text{di} \quad \bar{Z}=-\alpha h, \\ \bar{\xi}_\theta(\theta,\bar{Z},\tau) &= \xi_o \text{ di} && \bar{Z}=-\alpha h_o \end{aligned} \tag{3.5}$$

dengan $\xi_0(\theta,\tau)$ ditentukan berdasarkan hasil-hasil pada lapisan atas. Dengan menggunakan metode integral Fourier, penyelesaian Masalah nilai batas (3.5) dinyatakan dalam bentuk integral, yaitu

$$\bar{\xi}_\theta(\theta,\bar{Z},\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{\xi}_0(k,\tau)\frac{\sinh(k\bar{Z}+\alpha kh)}{\sinh(\alpha k(h-h_0))}\exp(ik\theta)dk$$

dengan

$$\hat{\xi}_0(k,\tau) = \int_{-\infty}^{\infty}\xi_0(\theta,\tau)\exp(-ik\theta)d\theta.$$

Turunan pertama $\bar{\xi}_\theta$ terhadap Z di $Z=-h_o$ adalah

$$\bar{\xi}_{\theta Z}(\theta,-h_0,\tau) = \frac{\alpha}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} k\coth(kH)\exp(ik\theta)\hat{\xi}_0(k,\tau)dk \tag{3.6}$$

dengan $H=\alpha(h-h_0)$.

Untuk memperoleh nilai-nilai ϕ dan $\xi_{2\theta}$ beserta turunannya terhadap Z di $Z=-h_0$, dimisalkan penyelesaian ξ dan turunannya terhadap Z di lapisan atas dan lapisan bawah, sama sampai $O(\alpha^2)$ di $Z=-h_0$.

Dengan demikian dari uraian asimtotik penyelesaian ξ lapisan atas dan lapisan bawah memberikan

$$\begin{aligned} \alpha\xi_1(\theta,-h_0,\tau)+\alpha^2\xi_2(\theta,-h_0,\tau), &= \alpha\bar{\xi}(\theta,-h_0,\tau), \\ \alpha\xi_{1Z}(\theta,-h_0,\tau)+\alpha^2\xi_{2Z}(\theta,-h_0,\tau) &= \alpha\bar{\xi}_Z(\theta,-h_0,\tau). \end{aligned} \qquad (3.7)$$

Dari bentuk $\xi_1 = A\phi$, koefisien α dan α^2 untuk persamaan pertama pada (3.7) sesudah diturunkan terhadap θ berturut-turut memberikan $\xi_o = A_\theta(\theta,\tau)\phi(-h_o)$ dan $\xi_{2\theta}(\theta,-h_o,\tau) = 0$. Koefisien α dan α^2 untuk persamaan kedua pada (3.7) sesudah diturunkan terhadap θ berturut-turut memberikan $\xi_{1\theta Z} = 0$ dan $\alpha\xi_{2\theta Z} = \bar{\xi}_{\theta Z}$. Karena $\bar{\xi}_{\theta Z} = O(\alpha)$, lihat Persamaan (3.6), maka diperoleh $\phi_Z(-h_o) = 0$ dan

$$\xi_{2\theta Z}(\theta,-h_0,\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} k\coth(kH)\exp(ik\theta)\hat{\xi}_0(k,\tau)dk.$$

Jika dinormalkan sehingga $\phi(-h_0) = 1$, diperoleh $\xi_0 = A_\theta(\theta,\tau)$ sehingga

$$\xi_{2\theta Z}(\theta,-h_0,\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} k\coth(kH)\exp(ik\theta)F(A_\theta)dk$$

dengan

$$F(A) = \int_{-\infty}^{\infty} A(\theta,\tau)exp(-ik\theta)d\theta.$$

Jika nilai-nilai ϕ dan $\xi_{2\theta}$ beserta turunannya terhadap Z di $Z = -h_o$ yang diperoleh di atas disubstitusi ke dalam Persamaan (3.4), maka diperoleh persamaan untuk $A(\theta,\tau)$ berikut

$$A_\tau + \bar{\mu}AA_\theta + \bar{\delta}L(A_\theta) = 0 \qquad (3.8)$$

dengan

$$L(A_\theta) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} k\coth(kH)\exp(ik\theta)F(A_\theta)dk. \qquad (3.9)$$

Koefisien $\bar{\mu}$ dan $\bar{\delta}$ berturut-turut diberikan oleh persamaan

$$\bar{\mu} = \frac{3\int_{-h_o}^{0}\rho_o(U_o-c)^2\phi_Z^3dZ}{2\int_{-h_o}^{0}\rho_o(c-U_o)\phi_Z^2dZ}\ ,\ \bar{\delta} = \frac{c^2\rho_\infty}{2\int_{-h_0}^{0}\rho_0(c-U_o)\phi_Z^2dZ}. \qquad (3.10)$$

Untuk $H\to\infty$, Persamaan (3.9) menjadi

$$L(A_\theta) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\, k\,| \exp(ik\theta)F(A_\theta)dk. \qquad (3.11)$$

Dengan menggunakan integral kompleks, diperoleh

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp(-ik\theta)}{\bar{\theta}-\theta}d\bar{\theta} = i\pi(\mathrm{sgn}(k))\exp(-ik\theta).$$

Jadi

$$|\, k\,|\, F(A) = \int_{-\infty}^{\infty} H(A_\theta)\exp(-ik\theta)d\theta$$

dengan

$$H(A) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{A(\bar{\theta},\tau)}{\bar{\theta}-\theta} d\bar{\theta}$$

yang merupakan *transformasi Hilbert dari* A. Persamaan (3.11) berbentuk

$$L(A_\theta) = -H(A_{\theta\theta})$$

dan Persamaan (3.8) menjadi

$$A_\tau + \bar{\mu} A A_\theta - \bar{\delta} H(A_{\theta\theta}) = 0 \qquad (3.12)$$

dengan koefisien $\bar{\mu}$ dan $\bar{\delta}$ yang diberikan pada Persamaan (3.10).

3.2. **Persamaan BO orde tinggi.** Untuk menurunkan persamaan gerak orde yang lebih tinggi, yaitu $O(\alpha^3)$, bagi gelombang internal, maka perlu ditentukan ξ_2, U_1, dan U_2. Untuk menentukan ξ_2, substitusi A_τ dari Persamaan BO (3.12) ke (3.3) sehingga bentuk F dan M menjadi

$$\begin{aligned} F &= -2\bar{\delta}\left(\rho_o(U_o-c)\phi_Z\right)_Z H(A_{\theta\theta}) + \left(3\left(\rho_o(U_o-c)^2\phi_Z^2\right)_Z\right. \\ &\quad \left. + 2\bar{\mu}\left(\rho_o(U_o-c)\phi_Z\right)_Z\right) A A_\theta, \\ M &= -2\bar{\delta}(U_o-c)\phi_Z H(A_{\theta\theta}) + \left(2\bar{\mu}(U_o-c)\phi_Z + 3(U_o-c)^2\phi_Z^2\right) A A_\theta. \end{aligned}$$

Persamaan (3.2) mempunyai penyelesaian bentuk homogen (F dan M sama dengan nol) dalam bentuk $A_2\phi$ dan penyelesaian bentuk tak homogen berbentuk $T(Z)H(A_\theta) + \hat{T}(Z)A^2$ diperoleh dengan metode koefisien tak tentu. Jadi penyelesaian Masalah nilai batas (3.2) dapat ditulis

$$\xi_2 = A_2(\theta,\tau)\phi(Z) + T(Z)H(A_\theta) + \hat{T}(Z)A^2 \qquad (3.13)$$

dengan $T(Z)$ memenuhi masalah nilai batas

$$\begin{aligned} (\rho_o(U_o &- c)^2 T_Z)_Z + \rho_o N^2 T = 2\bar{\delta}\left(\rho_o(U_o-c)\phi_Z\right)_Z\ ,\ -h_o < Z < 0, \\ gT &= (U_o-c)^2 T_Z - 2\bar{\delta}(U_o-c)\phi_Z \qquad \text{di } Z = 0 \qquad (3.14) \end{aligned}$$

dan $\hat{T}(Z)$ memenuhi masalah nilai batas berikut

$$\begin{aligned} (\rho_o(U_o &- c)^2\hat{T}_Z)_Z + \rho_o N^2\hat{T} = 2\bar{\mu}\left(\rho_o(U_o-c)\phi_Z\right)_Z \\ &\quad + \frac{3}{2}\left(\rho_o(U_o-c)^2\phi_Z^2\right)_Z\ \ -h_o < Z < 0 \qquad (3.15) \\ g\hat{T} &= (U_o-c)^2\hat{T}_Z - \bar{\mu}(U_o-c)\phi_Z - \frac{3}{2}(U_o-c)^2\phi_Z^2 \text{ di } Z = 0. \end{aligned}$$

Fungsi $\phi(Z)$ merupakan penyelesaian Masalah nilai batas (3.1), sedangkan $A_2(\theta,\tau)$ merupakan fungsi sembarang yang akan ditentukan. Fungsi T dan $\hat{T}$ di $Z = -h_o$ dipilih yang memenuhi $T(-h_o) = 0$ dan $\hat{T}(-h_o) = 0$, agar $\alpha(A + \alpha A_2)$ merupakan simpangan vertikal partikel fluida di $Z = -h_o$.

Untuk menentukan U_1 dan U_2, substitusi Uraian asimtotik (2.12) ke dalam persamaan kedua dalam (??). Koefisien α dan α^2 berturut-turut memberikan persamaan berikut

$$\begin{aligned} U_1 &= -(U_o - c)\phi_Z A, \\ U_2 &= -(U_o - c)\phi_Z A_2 - \left(\bar{\delta}\phi_Z + (U_o - c)T_Z\right) H(A_\theta) + \Big((U_o - c)\phi_Z^2 \\ &\quad + \frac{1}{2}\bar{\mu}\phi_Z - (U_o - c)\hat{T}_Z\Big) A^2. \end{aligned}$$

Selanjutnya, jika Uraian asimtotik (2.12) disubstitusikan ke dalam Persamaan (2.10) dan Syarat batas (2.11) di $Z = 0$, kemudian menyeimbangkan α dan ϵ $(\alpha = \epsilon)$, maka koefisien α^3 memberikan masalah nilai batas untuk ξ_3 sebagai berikut

$$\begin{aligned} \left(\rho_o (U_o - c)^2 \xi_{3\theta Z}\right)_Z + \rho_o N^2 \xi_{3\theta} &= \hat{F}, \qquad -h_o < Z < 0, \\ (U_o - c)^2 \xi_{3\theta Z} - g\xi_{3\theta} &= \hat{M} \qquad \text{di } Z = 0 \qquad (3.16) \end{aligned}$$

dengan

$$\begin{aligned} \hat{F} &= \bar{b}_1 A_{2\tau} + \bar{b}_2 (AA_2)_\theta + \bar{b}_3 H(A_{\theta\tau}) + \bar{b}_4 A^2 A_\theta \\ &\quad + \bar{b}_5 AH(A_{\theta\theta}) + \bar{b}_6 A_\theta H(A_\theta) + \bar{b}_7 A_{\theta\theta\theta}, \qquad (3.17) \\ \hat{M} &= \bar{a}_1 A_{2\tau} + \bar{a}_2 (AA_2)_\theta + \bar{a}_3 H(A_{\theta\tau}) + \bar{a}_4 A^2 A_\theta + \bar{a}_5 H(A_{\theta\theta}) + \bar{a}_6 H(A_\theta). \end{aligned}$$

Bentuk koefisien $\bar{a}_i$, $i = 1, 2..6$ dan $\bar{b}_i$, $i = 1, 2..7$ bergantung pada kondisi fisis fluida.

Syarat keterselesaian bagi Masalah nilai batas (3.16) adalah

$$\int_{-h_o}^{0} \hat{F}\phi dZ = \rho_o (U_o - c)^2 (\xi_{3\theta Z}\phi - \xi_{3\theta}\phi_Z) \Big|_{Z=-h_o}^{Z=0} \qquad (3.18)$$

dengan ϕ dan ξ_3 berturut-turut merupakan penyelesaian Masalah nilai batas (3.1) dan (3.16). Karena suku-suku ruas kanan Persamaan (3.18) di $Z = -h_o$ belum diketahui, maka akan ditentukan nilai-nilai ϕ dan $\xi_{3\theta}$ beserta turunannya terhadap Z di $Z = -h_o$ dengan menggunakan hasil fluida di lapisan bawah.

Dalam pembahasan lapisan bawah dimisalkan domain fluida didefinisikan pada kedalaman h yang cukup besar sehingga berlaku Persamaan (2.10) dan Syarat batas (2.11). Pada lapisan ini, dimisalkan

$$\xi = \alpha\bar{\xi}(\theta, \bar{Z}, \tau) + \alpha^2 \bar{\xi}_2(\theta, \bar{Z}, \tau) \qquad (3.19)$$

dengan $\bar{Z} = \epsilon Z$, rapat massa $\rho_o(Z) = \rho_\infty$ yang diasumsikan konstan dan $U_o = 0$. Substitusi Persamaan (3.19) ke dalam Persamaan (2.10) dan Syarat batas (2.11) di $Z = -h$, koefisien α^2 menghasilkan masalah nilai batas

$$\begin{aligned}
\bar{\xi}_{2\theta\theta\theta} + \bar{\xi}_{2\bar{Z}\bar{Z}\theta} &= 0, \qquad -\alpha h < \bar{Z} < -\alpha h_o, \\
\bar{\xi}_{2\theta}(\theta, \bar{Z}, \tau) &= 0 \qquad \text{di} \qquad \bar{Z} = -\alpha h, \qquad (3.20)\\
\bar{\xi}_{2\theta}(\theta, \bar{Z}, \tau) &= \xi_{02} \qquad \text{di} \qquad \bar{Z} = -\alpha h_o
\end{aligned}$$

dengan $\xi_{02}(\theta, \tau)$ ditentukan berdasarkan hasil-hasil pada lapisan atas. Dengan menggunakan metode integral Fourier, diperoleh penyelesaian Masalah nilai batas (3.20) sebagai

$$\bar{\xi}_{2\theta}(\theta, \bar{Z}, \tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{\xi}_{02}(k, \tau)\frac{\sinh(k\bar{Z} + \alpha kh)}{\sinh(\alpha k(h - h_o))}\exp(ik\theta)dk$$

dengan

$$\hat{\xi}_{02}(k, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \xi_{02}(\theta, \tau)\exp(-ik\theta)d\theta.$$

Turunan pertama $\bar{\xi}_{\theta}$ terhadap Z di $Z = -h_o$ adalah

$$\bar{\xi}_{2\theta Z}(\theta, -h_o, \tau) = \frac{\alpha}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} k\coth(kH)\exp(ik\theta)\hat{\xi}_0(k, \tau)dk. \qquad (3.21)$$

Selanjutnya, untuk memperoleh nilai-nilai ϕ dan $\xi_{3\theta}$ beserta turunannya terhadap Z di $Z = -h_o$, dimisalkan penyelesaian ξ dan turunannya terhadap Z di lapisan atas dan lapisan bawah, sama sampai $O(\alpha^3)$ di $Z = -h_o$. Dengan demikian dari uraian asimtotik penyelesaian ξ lapisan atas dan lapisan bawah memberikan

$$\begin{aligned}
\alpha\xi_1(\theta, -h_0, \tau) + \alpha^2\xi_2(\theta, -h_o, \tau) &+ \alpha^3\xi_3(\theta, -h_o, \tau) \\
&= \alpha\bar{\xi}(\theta, -h_o, \tau) + \alpha^2\bar{\xi}_2(\theta, -h_o, \tau), \\
\alpha\xi_{1Z}(\theta, -h_o, \tau) + \alpha^2\xi_{2Z}(\theta, -h_o, \tau) &+ \alpha^3\xi_{3Z}(\theta, -h_o, \tau) \qquad (3.22)\\
&= \alpha\bar{\xi}_Z(\theta, -h_o, \tau) + \alpha^2\bar{\xi}_{2Z}(\theta, -h_o, \tau).
\end{aligned}$$

Karena $\bar{\xi}_{2\theta}(\theta, -h_o, \tau) = \xi_{o2}$, maka koefisien α^2 dan α^3 untuk persamaan pertama pada (3.22) sesudah diturunkan terhadap θ berturut-turut memberikan $\xi_{2\theta}(\theta, -h_o, \tau) = \xi_{02}$ dan $\xi_{3\theta}(\theta, -h_o, \tau) = 0$. Koefisien α dan α^3 untuk persamaan kedua pada (3.7) sesudah diturunkan terhadap θ berturut-turut memberikan $\xi_{1\theta Z} = 0$ dan $\alpha\xi_{3\theta Z} = \bar{\xi}_{2\theta Z}$. Karena $\bar{\xi}_{2\theta Z} = O(\alpha)$, lihat Persamaan (3.21), maka diperoleh $\phi_Z(-h_o) = 0$ dan

$$\xi_{3\theta Z}(\theta, -h_o, \tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} k\coth(kH)\exp(ik\theta)\hat{\xi}_0(k, \tau)dk.$$

Normalkan $\phi(-h_o) = 1$, $T(-h_o) = 0$, dan $\hat{T}(-h_o) = 0$, memberikan $\xi_{02} = A_{2\theta}(\theta, \tau)$ sehingga

$$\xi_{3\theta Z}(\theta, -h_o, \tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} k\coth(kH)\exp(ik\theta)F(A_{2\theta})dk.$$

Untuk $H \to \infty$, diperoleh

$$\xi_{3\theta Z}(\theta, -h_o, \tau) = H(A_{2\theta\theta}).$$

Jika nilai-nilai ϕ dan $\xi_{3\theta}$ beserta turunannya terhadap Z di $Z = -h_o$ yang diperoleh di atas disubstitusi ke dalam Persamaan (3.18), maka diperoleh persamaan

$$A_{2\tau} + \bar{\mu}(AA_2)_\theta - \bar{\delta}H(A_{2\theta\theta}) = \hat{\Lambda} \tag{3.23}$$

dengan

$$\hat{\Lambda} = \alpha_1 A_{\theta\theta\theta} + \alpha_2 A^2 A_\theta + \alpha_3 AH(A_{\theta\theta}) + \alpha_4 A_\theta H(A_\theta) + \alpha_5 H(A_{\theta\tau}).$$

Simpangan vertikal partikel fluida di $Z = -h_o$ pada orde $O(\alpha^3)$ berbentuk

$$\begin{aligned} \xi &= \alpha A(\theta,\tau) + \alpha^2 A_2(\theta,\tau) + O(\alpha^3) \\ &= \alpha B(\theta,\tau) + O(\alpha^3), \end{aligned}$$

dengan $B = A + \alpha A_2$. Jika Persamaan BO (3.12) dan Persamaan (3.23) dikombinasikan dan mengabaikan suku-suku α^3, maka diperoleh persamaan untuk B berikut

$$\begin{aligned} B_\tau &+ \bar{\mu}BB_\theta - \bar{\delta}H(B_{\theta\theta}) + \alpha\big(\alpha_1 A_{\theta\theta\theta} + \alpha_2 A^2 A_\theta \\ &+ \alpha_3 AH(A_{\theta\theta}) + \alpha_4 A_\theta H(A_\theta) + \alpha_5 H(A_{\theta\tau})\big) = 0. \end{aligned} \tag{3.24}$$

Persamaan (3.24) merupakan persamaan gerak gelombang internal pada fluida dalam dengan orde $O(\alpha^3)$ dan selanjutnya disebut *persamaan BO orde tinggi*.

Dengan demikian, apabila rapat massa dalam keadaan setimbang $\rho_o(Z)$ pada fluida dalam diketahui, maka kurva isopycnal dapat digambarkan. Kurva tersebut dinyatakan oleh

$$z = Z + \alpha A(\theta,\tau)\phi(Z) + \alpha^2(A_2(\theta,\tau)\phi(Z) + T(Z)H(A_\theta) + \hat{T}(Z)A^2) \tag{3.25}$$

dengan $A(\theta,\tau)$ dan $A_2(\theta,\tau)$ berturut-turut merupakan penyelesaian Persamaan (3.12) dan (3.23). Fungsi-fungsi $\phi(Z)$, $T(Z)$, dan $\hat{T}(Z)$ berturut-turut merupakan penyelesaian dari Masalah nilai batas (3.1), (3.14), dan (3.15).

4. Kesimpulan

Metode asimtotik merupakan suatu metode yang sesuai untuk digunakan dalam penyelesaian masalah-masalah tak linear. Salah satu masalah tak linear yang diselesaikan dengan metode asimtotik adalah masalah gelombang internal pada fluida dengan kedalaman yang cukup besar. Penggunaan metode ini menunjukkan hasil yang cukup baik, karena dapat memberikan taksiran dengan orde yang tinggi.

Daftar Pustaka

[1] Benney, D.J. (1966), Long nonlinear waves in fluid flows, *J. Math. Phys.*, **45**, 52-63

[2] Grimshaw, R., E. Pelinovsky, O. Poloukhina (2001), Higher-order Korteweg-de Vries models for internal solitary waves in a stratified shear flow with a free surface, submitted to *Nonlinear Proc. in Geophy.*

[3] Kubota, T., D.R.S. Ko, L.D. Dobbs (1978), Propagation of weakly nonlinear internal waves in a stratified fluid of finite depth, *AIAA J. Hydrodyn*, **12**, 157-165

[4] Ono, H. (1975), Algebraic solitary wave in stratified fluids, *J. Phys. Soc. Japan*, **39**, 1082-1091