ALJABAR WEYL, CONTOH GELANGGANG NOETHER DAN PRIM

TEDUH WULANDARI

Departemen Matematika,
Fakultas Matematika dan Imu Pengetahuan Alam,
Institut Pertanian Bogor
Jl. Raya Pajajaran, Kampus IPB Baranangsiang, Bogor, Indonesia

ABSTRAK. Tulisan ini memperlihatkan bahwa aljabar Weyl merupakan suatu gelanggang Noether dan Prim tetapi bukan suatu Daerah Dedekind.
Kata Kunci: Aljabar Weyl, Gelanggang Noether Prim, Daerah Dedekind.

1. Pendahuluan

Tulisan ini merupakan bagian dari rangkaian penelitian mengenai hubungan antara daerah ideal utama, daerah Dedekind dan gelanggang Herediter, Noether dan Prim (HNP). Pada [8] sudah diperlihatkan mengenai hubungan daerah ideal utama dan daerah Dedekind. Sedangkan pada [9] diperlihatkan bahwa tidak semua daerah Dedekind merupakan daerah ideal utama. Pada [11] diperlihatkan bahwa daerah Dedekind merupakan suatu gelanggang HNP.

Tulisan ini akan memperlihatkan contoh dari suatu gelanggang Noether dan Prim yang bukan merupakan daerah Dedekind. Contoh tersebut adalah aljabar Weyl. Tulisan ini akan membahas beberapa sifat pada aljabar Weyl yang akan digunakan untuk memperlihatkan bahwa aljabar Weyl merupakan suatu gelanggang Noether Prim.

2. Teori Dasar yang Digunakan

Berikut diberikan definisi dan teorema dasar yang digunakan dalam tulisan ini.

Definisi 1. *Misalkan R himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan dua operasi yaitu $+$ dan $\times$, dinotasikan $(R, +, \times)$, disebut gelanggang jika memenuhi*

1. *terhadap operasi tambah* $(R,+)$ *membentuk grup komutatif,*
2. *terhadap operasi kali* $(R,\times)$ *memenuhi sifat asosiatif:* $(ab)c = a(bc)$ *untuk semua unsur* a,b,c *di* R*; dan terdapat unsur kesatuan* $1 \in R$ *yang berbeda dari 0 dan bersifat* $a1 = 1a = a$ *untuk semua unsur* $a \in R$*,*
3. *terhadap operasi tambah dan operasi kali secara bersama-sama* $(R,+,\times)$ *memenuhi sifat distributif:* $a(b+c) = ab+ac$ *dan* $(a+b)c = ac+bc$ *untuk semua unsur* $a,b,c \in R$*.*

Contoh dari gelanggang adalah $\mathbb{Z}$.

Definisi 2. *Gelanggang komutatif adalah gelanggang* $R = (R,+,\times)$ *yang memenuhi sifat komutatif yaitu* $ab = ba$ *untuk semua unsur* a *dan* b *di* R*.*

Definisi 3. *Daerah integral adalah gelanggang komutatif* $D = (D,+,\times)$ *yang tidak memuat pembagi nol, yaitu untuk unsur* a *dan* b *di* D *yang memenuhi* $ab = 0$ *berlaku* $a = 0$ *atau* $b = 0$*.*

Definisi 4. *Misalkan* $R = (R,+,\times)$ *suatu gelanggang. Subhimpunan tak kosong dari* R*,* $I \subseteq R$ *disebut ideal kiri (ideal kanan) jika*

1. *terdapat operasi tambah* $(I,+)$ *membentuk subgrup dari* $(R,+)$*,*
2. *untuk setiap* $x \in I$ *dan* $r \in R$ *berlaku* $rx \in I (xr \in I)$*.*

Subhimpunan I *disebut ideal jika* I *adalah ideal kiri dan ideal kanan.*

Definisi 5. *Misalkan* R *suatu gelanggang, modul kiri* M *atas gelanggang* R *adalah*

1. *grup komutatif* $M = (M,+)$*. yang dilengkapi oleh*
2. *tindakan* $R\times M \to M$ *melalui pengaitan* $(\alpha,x) \mapsto \alpha x$ *untuk semua pasang* $(\alpha,x) \in R\times M$*, dan untuk setiap* α,β *di* R *dan* x,y *di* M *berlaku*
   (a) $\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$,
   (b) $(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x$,
   (c) $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$,
   (d) $1x = x$.

Modul kiri M *atas* R *dinotasikan* ${}_RM$*. Tindakan biasa juga disebut dengan operasi perkalian skalar. Untuk modul kanan, yang berbeda hanya tindakan dilakukan dari kanan. Modul yang merupakan modul kanan dan juga merupakan modul kiri cukup disebut dengan modul.*

Definisi 6. *Misalkan* A *suatu gelanggang dan* M *suatu modul atas* A*. Suatu himpunan* $S = \{x_1, x_2, \ldots x_n\}$ *dikatakan membangun* M*, jika setiap anggota dari* M*, misalkan* m *dapat ditulis dalam* $m = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n$ *dengan* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in A$*.* M *dikatakan dibangun secara hingga jika elemen dari* S *hingga.*

Berikut definisi mengenai modul Noether dan gelanggang Noether.

Definisi 7. *Misalkan A suatu gelanggang dan M suatu modul kiri atas A. Modul M disebut modul Noether jika memenuhi salah satu dari ketiga kondisi berikut ini*

1. *setiap submodul dari M dibangun secara hingga,*
2. *setiap rantai naik dari submodul M*

$$M_1 \subseteq M_2 \subseteq ... \subseteq M_k \subseteq ...$$

   merupakan rantai naik stabil, artinya terdapat bilangan asli N sehingga $M_n = M_k$ untuk setiap bilangan asli $k \leq n$,
3. *setiap himpunan tak nol dari submodul-submodul M selalu memiliki unsur maksimal.*

Definisi 8. *Suatu gelanggang R dikatakan gelanggang Noether kiri (kanan) jika R sebagai modul kiri (kanan) atas dirinya sendiri adalah modul Noether. Jika R merupakan gelanggang Noether kiri dan juga merupakan gelanggang Noether kanan, maka R dikatakan gelanggang Noether.*

Definisi 9. *Suatu gelanggang R dikatakan gelanggang prim jika untuk setiap unsur tak nol a, b di R berlaku $aRb \neq 0$, dengan kata lain ada $r \in R$ sedemikian sehingga $arb \neq 0$.*

Salah satu contoh gelanggang prim adalah gelanggang matriks berukuran 2×2 atas bilangan bulat.

3. Definisi Aljabar Weyl

Selanjutnya akan dibahas mengenai pembentukan secara sederhana aljabar Weyl, pembahasan ini akan dimulai dengan contoh-contoh berikut.

Contoh 10. *Misalkan K lapangan dan $\{x, y\}$ peubah tak komutatif atas K. Definisikan $R = K[x, y]$ polinomial dengan peubah tak komutatif. Misalkan $F = \langle xy - yx \rangle$, maka F merupakan ideal atas R, sehingga dapat dibentuk gelanggang kuosien $\bar{R} = R/F$. Perhatikan bahwa $xy - yx \in F$ sehingga*

$$\begin{aligned}
\overline{xy - yx} &= \overline{0} \\
\overline{xy} - \overline{yx} &= \overline{0} \\
\overline{xy} &= \overline{yx}
\end{aligned}$$

akibatnya $\overline{x}^i\overline{y}^j = \overline{y}^j\overline{x}^i$. *Untuk sebarang* $\overline{f(x,y)} \in \overline{R}$ *dapat diperoleh*

$$\begin{aligned}
\overline{f(x,y)} &= \overline{\sum_i \sum_j \left(\alpha_{ij}x^iy^j + \beta_{ij}y^ix^j\right)} \\
&= \sum_i \sum_j \left(\overline{\alpha_{ij}x^iy^j} + \overline{\beta_{ij}y^ix^j}\right) \\
&= \sum_i \sum_j \left(\overline{\alpha_{ij}}\ \overline{x}^i\overline{y}^j + \overline{\beta_{ij}}\overline{y}^i\overline{x}^j\right) \\
&= \sum_i \sum_j \left(\overline{\alpha_{ij}}\ \overline{x^i}\ \overline{y^j} + \overline{\beta_{ij}}\overline{x^j}\ \overline{y^i}\right)
\end{aligned}$$

sehingga $\overline{f(x,y)}$ *dapat ditulis sebagai* $\sum_k \sum_l \left(\overline{\gamma_{kl}}\ \overline{x^k}\ \overline{y^l}\right)$. *Jadi setiap elemen* $\bar{R}$ *dapat ditulis dalam bentuk* $\sum_k \sum_l \left(\overline{\gamma_{kl}}\ \overline{x^k}\ \overline{y^l}\right)$ *akibatnya* $\bar{R}$ *dapat dipandang sebagai polinomial* $K[\overline{x},\overline{y}]$ *dengan* $\{\overline{x},\overline{y}\}$ *sebagai indeterminates yang komutatif dengan kata lain* $\bar{R}$ *dapat dipandang sebagai polinomial biasa yang sudah kita kenal.*

Contoh lain mengenai polinomial adalah sebagai berikut

Contoh 11. *Misalkan* K *dan* $R[x,y]$ *yang sama seperti contoh 10. Misalkan juga* $G = \langle x^2+1, y^2+1, xy+yx\rangle$, *maka* G *juga merupakan ideal atas* R *sehingga dapat dibentuk gelanggang kuosien* $\overline{R} = R/G$. *Perhatikan bahwa*

$$x^2+1 \in G \quad y^2+1 \in G \quad xy+yx \in G$$

sehingga dapat diperoleh

$$\begin{array}{rrr}
\overline{x^2+1} = \overline{0} & \overline{y^2+1} = \overline{0} & \overline{xy+yx} = \overline{0} \\
\overline{x}^2 = -\overline{1} & \overline{y}^2 = -\overline{1} & \overline{xy} = -\overline{yx} \\
 & & \textit{akibatnya}\ \overline{x}^i\overline{y}^j = -\overline{y}^j\overline{x}^i.
\end{array}$$

Untuk sebarang $\overline{f(x,y)} \in \overline{R}$

$$\begin{aligned}
\overline{f(x,y)} &= \overline{\sum_i \sum_j \left(\alpha_{ij} x^i y^j + \beta_{ij} y^i x^j\right)} \\
&= \overline{\sum_i \sum_j \left(\alpha_{ij} x^i y^j - \beta_{ij} x^j y^i\right)} \\
&= \sum_m \sum_n \left(\overline{\gamma_{mn}}\ \overline{x}^m \overline{y}^n\right) \\
&= \underbrace{\sum_m \sum_n \left(\overline{\gamma_{mn}}\ \overline{x}^m \overline{y}^n\right)}_{m,n \text{ bilangan genap}} + \underbrace{\sum_m \sum_n \left(\overline{\gamma_{mn}}\ \overline{x}^m \overline{y}^n\right)}_{m \text{ bilangan ganjil, } n \text{ bilangan genap}} \\
&+ \underbrace{\sum_m \sum_n \left(\overline{\gamma_{mn}}\ \overline{x}^m \overline{y}^n\right)}_{n \text{ bilangan ganjil, } m \text{ bilangan genap}} + \underbrace{\sum_m \sum_n \left(\overline{\gamma_{mn}}\ \overline{x}^m \overline{y}^n\right)}_{m,n \text{ bilangan ganjil}} \\
&= \overline{a} + \overline{b}\overline{x} + \overline{c}\ \overline{y} + \overline{d}\overline{x}\ \overline{y}
\end{aligned}$$

sehingga $\overline{f(x,y)}$ *dapat ditulis sebagai* $\overline{a} + \overline{b}\overline{x} + \overline{c}\ \overline{y} + \overline{d}\overline{x}\ \overline{y}$. *Jadi setiap elemen* $\bar{R}$ *dapat ditulis dalam bentuk* $\overline{a} + \overline{b}\overline{x} + \overline{c}\ \overline{y} + \overline{d}\overline{x}\ \overline{y}$ *dengan sifat* $\overline{x}^2 = -\overline{1}$, $\overline{y}^2 = -\overline{1}$ *dan* $\overline{xy} = -\overline{yx}$ *akibatnya* $\bar{R}$ *dapat dipandang sebagai gelanggang quaternion.*

Aljabar Weyl juga berawal dari polinomial seperti contoh-contoh sebelumnya. Misalkan K lapangan dan $R = [x,y]$ polinomial dengan indeterminates tak komutatif. Misalkan juga $F = \langle xy - yx - 1 \rangle$, maka F membentuk ideal sehingga R/F membentuk gelanggang kuosien dengan sifat

$$\begin{aligned}
\overline{xy - xy - 1} &= \overline{0} \\
\overline{xy} &= \overline{xy} + \overline{1}.
\end{aligned}$$

Sifat ini dapat dikembangkan sebagai berikut, karena F ideal dari R dan $y \in R$ maka
$(xy - yx - 1)\, y \in F$ dan $y\,(xy - yx - 1) \in F$ sehingga

$$\begin{aligned}
(xy - yx - 1)\, y + y\,(xy - yx - 1) &= xy^2 - yxy - y + yxy - y^2x - y \\
&= xy^2 - y^2x - 2y \in F,
\end{aligned}$$

akibatnya

$$\begin{aligned}
\overline{xy^2 - y^2x - 2y} &= 0 \\
\overline{xy}^2 &= \overline{y}^2\overline{x} + 2\overline{y}.
\end{aligned}$$

Selanjutnya perhatikan

$$\begin{aligned}
(xy - yx - 1)\, y^2 + y\left(xy^2 - y^2x - 2y\right) &= xy^3 - yxy^2 - y^2 + yxy^2 \\
- y^3x - 2y^2 &= xy^3 - y^3x - 3y^2 \in F,
\end{aligned}$$

akibatnya

$$\begin{aligned}\overline{xy^3 - y^3x - 3y^2} &= 0\\ \overline{xy}^3 &= \overline{y}^3\overline{x} + 3\overline{y}^2.\end{aligned}$$

Secara umum $xy^n - y^nx - ny^{n-1}$ merupakan elemen dari F, karena untuk n genap diperoleh

$$\begin{aligned}&\left(xy^{\frac{n}{2}} - y^{\frac{n}{2}}x - \frac{n}{2}y^{\frac{n}{2}-1}\right)y^{\frac{n}{2}} + y^{\frac{n}{2}}\left(xy^{\frac{n}{2}} - y^{\frac{n}{2}}x - \frac{n}{2}y^{\frac{n}{2}-1}\right)\\ &\qquad = xy^n - y^{\frac{n}{2}}xy^{\frac{n}{2}} - \frac{n}{2}y^{n-1} + y^{\frac{n}{2}}xy^{\frac{n}{2}} - y^nx\\ &\qquad - \frac{n}{2}y^{n-1} = xy^n - y^nx - ny^{n-1} \in F,\end{aligned}$$

sedangkan untuk n ganjil, misalkan $n = k + l$ dengan k, l bilangan asli

$$\begin{aligned}&\left(xy^k - y^kx - ky^{k-1}\right)y^l + y^k\left(xy^l - y^lx - ly^{l-1}\right)\\ &= xy^{k+l} - y^kxy^l - ky^{(k+l)-1} + y^kxy^l - y^{k+l}x - ly^{(k+l)-1}\\ &= xy^{k+l} - y^{k+l}x - (k+l)\,y^{(k+l)-1} \in F.\end{aligned}$$

Akibatnya $xy^n - y^nx - ny^{n-1} \in F$ sehingga

$$\begin{aligned}\overline{xy^n - y^nx - ny^{n-1}} &= 0\\ \overline{xy}^n &= \overline{y}^n\overline{x} + n\overline{y}^{n-1}.\end{aligned}$$

Bentuk di atas dapat lebih diperumum, misalkan $f(y) = \sum a_ny^n$ akibatnya $\frac{df}{dy} = \sum n\, a_ny^{n-1}$ sehingga

$$\begin{aligned}\sum a_n\left(xy^n - y^nx - ny^{n-1}\right) &= \sum\left(a_nxy^n - a_ny^nx - a_nny^{n-1}\right)\\ &= \sum\left(xa_ny^n - a_ny^nx - na_ny^{n-1}\right)\\ &= x\sum a_ny^n - \sum a_ny^nx - n\sum a_ny^{n-1}\\ &= xf(y) - f(y)\,x - n\frac{df}{dy} \in F,\end{aligned}$$

akibatnya

$$\begin{aligned}\overline{xf(y) - f(y)\,x - nf(y)^{n-1}} &= 0\\ \overline{x}\,\overline{f(y)}^n &= \overline{f(y)}^n\,\overline{x} + n\overline{f(y)}^{n-1}.\end{aligned}$$

Dengan cara yang sama dapat juga diperoleh $\overline{y}\,\overline{f(x)}^n = \overline{f(x)}^n\,\overline{y} - n\overline{f(x)}^{n-1}$. Gelanggang kuosien R/F ini dinotasikan dengan $A_1(K)$ dan dikenal dengan *aljabar Weyl* tingkat satu atas K. Untuk selanjutnya elemen dari aljabar Weyl $A_1(K)$ dinotasikan tanpa garis di atas. Secara umum aljabar Weyl merupakan polinomial dengan indeterminates tak komutatif yang memiliki sifat $xf(y) = f(y)\,x + \frac{df}{dy}$. Akibat sifat tersebut bentuk $h(x) = \sum_i \sum_j \alpha_{ij} x^i y^j + \beta_{ij} y^i x^j$ sebagai elemen dari $A_1(K)$ dapat ditulis menjadi $h(x) = \sum_k \sum_l \gamma_{kl} y^k x^l$

Contoh 12.

$$\begin{aligned}
4x^2y^3 + 2y^2x^3 &= 4x\left(y^3x - 3y^2\right) + 2y^2x^3 \\
&= 4xy^3x - 12xy^2 + 2y^2x^3 \\
&= 4\left(y^3x - 3y^2\right)x - 12\left(y^2x - 2y\right) + 2y^2x^3 \\
&= 4y^3x^2 - 12y^2x - 12y^2x - 24y + 2y^2x^3 \\
&= 4y^3x^2 - 12y^2x - 24y + 2y^2x^3
\end{aligned}$$

4. Aljabar Weyl, Gelanggang Noether Prim

Selanjutnya akan diperlihatkan bahwa aljabar Weyl memenuhi gelanggang Noether dan gelanggang Prim. Untuk yang pertama akan ditunjukkan bahwa aljabar Weyl $A_1(K)$ merupakan gelanggang Prim. Untuk menunjukkan aljabar Weyl merupakan gelanggang Prim cukup dengan menunjukkan bahwa aljabar Weyl tidak memuat pembagi nol. Misalkan $f, g \in A_1(K)$ dengan $f \neq 0$ dan $g \neq 0$, akan ditunjukkan $fg \neq 0$. Misalkan $f = \sum_i \sum_j \alpha_{ij} y^i x^j$ dan $g = \sum_i \sum_j \beta_{ij} y^i x^j$, karena f dan g tidak nol maka ada $\alpha_{ij} \neq 0$ dan $\beta_{kl} \neq 0$ untuk suatu i, j, k, l. Karena $\alpha_{ij}, \beta_{kl} \in K$ yang merupakan suatu lapangan maka $\alpha_{ij}\beta_{kl} \neq 0$, akibatnya $fg \neq 0$. Jadi aljabar Weyl $A_1(K)$ merupakan suatu gelanggang prim.

Sebelum menunjukkan bahwa aljabar Weyl merupakan gelanggang Noether akan dibahas terlebih dulu mengenai teorema berikut

Teorema 13. *Basis Hilbert*
Misalkan R gelanggang Noether. Maka ring polinomial $R[x]$ juga merupakan gelanggang Noether.

Bukti : Misalkan R gelanggang Noether yang komutatif, akan ditunjukkan $R[x]$ merupakan gelanggang Noether. Untuk menunjukkan $R[x]$ merupakan gelanggang Noether akan ditunjukkan bahwa setiap ideal di $R[x]$ dibangun secara hingga. Jelas bahwa ideal nol dibangun secara hingga oleh nol itu sendiri. Misalkan $I \subseteq R$ merupakan suatu ideal yang tak nol. Akan ditunjukkan I dibangun secara hingga. Misalkan $f(x) \in R[x]$ dengan $f \neq 0$, notasikan $lc(f(x))$ sebagai koefisien dari pangkat tertinggi f. Untuk $n = 0, 1, 2, 3 \ldots$ definisikan

$$I_n = \{a \in R; lc(f(x)) = a \text{ untuk suatu } f(x) \in I \text{ dengan derajat } n\}$$

dengan kata lain, I_n merupakan himpunan koefisien dari polinomial dengan derajat tertinggi n. Akan ditunjukkan bahwa I_n merupakan ideal atas R untuk setiap n. Misalkan $a, b \in I_n$ maka ada $f, g \in R[x]$ sedemikian sehingga $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + ax^n$ dan $g(x) = b_0 + b_1 + \ldots + bx^n$ selanjutnya $f(x) + g(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) + \ldots +$

$(a+b)\,x^n$ akibatnya $a+b \in I_n$. Misalkan $r \in R$ karena $rf(x) = r(a_0 + a_1 x + \ldots + ax^n) = ra_0 + ra_1 x + \ldots + rax^n$ akibatnya $ra \in I_n$. Jadi I_n ideal atas R. Misalkan $a \in I_n$ maka ada $f \in R[x]$ sedemikian sehingga $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + ax^n$ akibatnya $xf(x) = x(a_0 + a_1 x + \ldots + ax^n) = xa_0 + xa_1 x + \ldots + xax^n = a_0 x + a_1 x^2 + \ldots + ax^{n+1}$ sehingga $a \in I_{n+1}$. Jadi $I_n \subseteq I_{n+1}$ untuk setiap n. Akibatnya dapat diperoleh $I_0 \subseteq I_1 \subseteq I_2 \subseteq \ldots$ karena R Noether maka ada $k \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $I_k = I_n$ untuk setiap $n \geq k$, sehingga rantai naik ideal di atas menjadi $I_0 \subseteq I_1 \subseteq I_2 \subseteq \ldots \subseteq I_k = I_{k+1} \ldots$. Karena R Noether maka setiap ideal dari R dibangun secara hingga akibatnya untuk $0 \leq m \leq k$, dapat diperoleh $\{a_{m1}, a_{m2}, \ldots a_{ms_m}\}$ sebagai pembangun bagi I_m. Pilih $f_{mj}(x) \in I$ sedemikian sehingga $\deg(f_{mj}(x)) = m$ dan $lc(f_{mj}(x)) = a_{mj}$ untuk semua $0 \leq m \leq k$ dan $1 \leq j \leq s_m$. Misalkan $\widehat{I} = \langle f_{mj}(x)\,; 0 \leq m \leq k, 1 \leq j \leq s_m \rangle$, akan ditunjukkan bahwa $I = \widehat{I}$. Pertama akan ditunjukkan bahwa $I \subseteq \widehat{I}$. Misalkan $f(x) \in I$, jika $f(x) = 0$ dan karena $\widehat{I}$ merupakan ideal maka $f(x) \in \widehat{I}$. Jika $f(x) \neq 0$, misalkan $\deg(f(x)) = r$ dan $a = lc(f(x))$. Akan digunakan induksi pada r untuk menunjukkan $f(x) \in \widehat{I}$. Untuk $r = 1$ maka $r \leq k$ akibatnya $a \in I_1$ sehingga dapat ditulis $a = c_1 a_{11} + c_2 a_{12} + \ldots + c_{s_1} a_{1s_1}$. Perhatikan polinomial

$$\begin{aligned}
g(x) &= \sum_{i=1}^{s_1} c_i f_{ri}(x) \in \widehat{I} \\
&= c_1 f_{11}(x) + c_2 f_{12}(x) + \ldots + c_{s_1} f_{1s_1}(x) \\
&= c_1 (b_{10} + a_{11} x) + c_2 (b_{20} + a_{12} x) + \ldots + c_{s_1} (b_{s_1 0} + a_{1s_1} x) \\
&= (c_1 b_{10} + c_2 b_{20} + \ldots + c_{s_1} b_{s_1}) + (c_1 a_{11} + c_2 a_{12} + \ldots + c_{s_1} a_{1s_1})\, x \\
&= (c_1 b_{10} + c_2 b_{20} + \ldots + c_{s_1} b_{s_1}) + ax,
\end{aligned}$$

sehingga diperoleh $lc(g(x)) = a$ akibatnya $\deg f(x) - g(x) < r = 1$, jadi $\deg(f(x) - g(x)) = 0$ dengan $lc(f(x) - g(x)) = c_1 b_{10} + c_2 b_{20} + \ldots + c_{s_1} b_{s_1} = c$. Karena $c \in I_0$ maka $c = l_1 a_{01} + l_2 a_{02} + \ldots + l_{s_0} a_{0s_0}$ akibatnya akan ada $f_{01}, f_{02}, \ldots, f_{0s_0} \in I$ dengan $\deg(f_{oj}(x)) = 0$ dan $lc(f_{oj}(x)) = a_{0j}$ untuk $1 \leq j \leq s_0$. Perhatikan

$$\begin{aligned}
c &= l_1 a_{01} + l_2 a_{02} + \ldots + l_{s_0} a_{0s_0} \\
&= l_1 \left(a_{01} x^0\right) + l_2 \left(a_{02} x^0\right) + \ldots + l_{s_0} \left(a_{0s_0} x^0\right) \\
&= l_1 f_{01} + l_2 f_{02} + \ldots + l_{s_0} f_{0s_0} \\
&= \sum_{i=1}^{s_0} l_i f_{0i} \in \widehat{I}.
\end{aligned}$$

Jadi $(f(x) - g(x)) \in \widehat{I}$, karena $g(x) \in \widehat{I}$ dan $\widehat{I}$ merupakan ideal maka $(f(x) - g(x)) + g(x) \in \widehat{I}$. Jadi $f(x) \in \widehat{I}$. Untuk $r = 2$ maka $r \leq k$ akibatnya $a \in I_2$ sehingga dapat ditulis $a = c_1 a_{21} + c_2 a_{22} + \ldots + c_{s_2} a_{2s_2}$.

Perhatikan polinomial

$$
\begin{aligned}
g(x) &= \sum_{i=1}^{s_2} c_i f_{ri}(x) \in \widehat{I} \\
&= c_1 f_{21}(x) + c_2 f_{22}(x) + \ldots + c_{s_2} f_{2s_2}(x) \\
&= c_1\left(b_{10} + b_{11}x + a_{21}x^2\right) + c_2\left(b_{20} + b_{21}x + a_{22}x^2\right) + \ldots \\
&+ c_{s_2}\left(b_{s_2 0} + b_{s_2 1}x + a_{2s_2}x^2\right) \\
&= \left(c_1 b_{10} + c_2 b_{20} + \ldots + c_{s_2} b_{s_2}\right) + \left(c_1 b_{11} + c_2 b_{21} + \ldots + c_{s_2} b_{s_2 1}\right) x \\
&+ \left(c_1 a_{21} + c_2 a_{22} + \ldots + c_{s_2} a_{2s_1}\right) x^2 \\
&= \left(c_1 b_{10} + c_2 b_{20} + \ldots + c_{s_1} b_{s_1}\right) + \left(c_1 b_{11} + c_2 b_{21} + \ldots + c_{s_2} b_{s_2 1}\right) x \\
&+ ax^2,
\end{aligned}
$$

sehingga diperoleh $lc(g(x)) = a$ akibatnya $\deg f(x) - g(x) < r = 2$, jadi $\deg(f(x) - g(x)) = 1$, dengan $lc(f(x) - g(x)) = c_1 b_{11} + c_2 b_{21} + \ldots + c_{s_2} b_{s_2 1}$ berdasarkan langkah sebelumnya $f(x) - g(x) \in \widehat{I}$. Karena $f(x) - g(x) \in \widehat{I}$ dan $g(x) \in \widehat{I}$ maka $(f(x) - g(x)) + g(x) \in \widehat{I}$. Jadi $f(x) \in \widehat{I}$. Sehingga berdasarkan induksi terhadap r untuk $r \leq k$ dapat diperoleh, misalkan $\deg(h(x)) = r$ untuk $r < k$, maka $h(x) \in \widehat{I}$. Untuk $r = k$, karena $a = lc(f(x))$ akibatnya $a \in I_k$ sehingga dapat ditulis $a = c_1 a_{k1} + c_2 a_{k2} + \ldots + c_{s_k} a_{ks_k}$. Perhatikan polinomial

$$
\begin{aligned}
g(x) &= \sum_{i=1}^{s_k} c_i f_{ki}(x) \in \widehat{I} \\
&= c_1 f_{k1}(x) + c_2 f_{k2}(x) + \ldots + c_{s_k} f_{ks_k}(x) \\
&= c_1\left(b_{10} + b_{11}x + \ldots + a_{k1}x^k\right) + c_2\left(b_{20} + b_{21}x + \ldots + a_{k2}x^k\right) + \\
&\ldots + c_{s_k}\left(b_{s_k 0} + b_{s_k 1}x + \ldots + a_{ks_k}x^k\right) \\
&= \left(c_1 b_{10} + c_2 b_{20} + \ldots + c_{s_k} b_{s_k}\right) + \left(c_1 b_{11} + c_2 b_{21} + \ldots + c_{s_k} b_{s_k 1}\right) x + \\
&\ldots + \left(c_1 a_{k1} + c_2 a_{k2} + \ldots + c_{s_k} a_{ks_k}\right) x^k \\
&= \left(c_1 b_{10} + c_2 b_{20} + \ldots + c_{s_1} b_{s_1}\right) + \left(c_1 b_{11} + c_2 b_{21} + \ldots + c_{s_2} b_{s_2 1}\right) x + \\
&\ldots + ax^k,
\end{aligned}
$$

sehingga diperoleh $lc(g(x)) = a$ akibatnya $\deg f(x) - g(x) < r = k$, berdasarkan hipotesis $f(x) - g(x) \in \widehat{I}$. Karena $f(x) - g(x) \in \widehat{I}$ dan $g(x) \in \widehat{I}$ maka $(f(x) - g(x)) + g(x) \in \widehat{\dot{I}}$. Jadi $f(x) \in \widehat{I}$. Untuk $r = k + 1$ maka $r > k$ akibatnya $a \in I_k$ sehingga dapat ditulis $a =$

$c_1a_{k1}+c_2a_{k2}+\ldots+c_{s_k}a_{ks_k}$. Perhatikan polinomial

$$
\begin{aligned}
g(x) &= \sum_{i=1}^{s_k} c_i x^{r-k} f_{ri}(x) \in \widehat{I} \\
&= c_1x^{k+1-k}f_{k1}(x)+c_2x^{k+1-k}f_{k2}(x)+\ldots+c_{s_k}x^{k+1-k}f_{ks_k}(x) \\
&= c_1xf_{k1}(x)+c_2xf_{k2}(x)+\ldots+c_{s_k}xf_{ks_k}(x) \\
&= c_1x\left(b_{10}+b_{11}x+\ldots+a_{k1}x^k\right)+c_2x\left(b_{20}+b_{21}x+\ldots+a_{k2}x^k\right) \\
&+\ldots+c_{s_k}x\left(b_{s_k0}+b_{s_k1}x+\ldots+a_{ks_k}x^k\right) \\
&= (c_1b_{10}+c_2b_{20}+\ldots+c_{s_k}b_{s_k})\,x+(c_1b_{11}+c_2b_{21}+\ldots+c_{s_k}b_{s_k1})\,x^2 \\
&+\ldots+(c_1a_{k1}+c_2a_{k2}+\ldots+c_{s_k}a_{ks_k})\,x^{k+1} \\
&= (c_1b_{10}+c_2b_{20}+\ldots+c_{s_1}b_{s_1})\,x+(c_1b_{11}+c_2b_{21}+\ldots+c_{s_2}b_{s_21})\,x^2 \\
&+\ldots+ax^{k+1},
\end{aligned}
$$

sehingga diperoleh $lc(g(x))=a$ akibatnya $\deg f(x)-g(x)<k+1$, berdasarkan langkah sebelumnya $f(x)-g(x)\in\widehat{I}$. Karena $f(x)-g(x)\in\widehat{I}$ dan $g(x)\in\widehat{I}$ maka $(f(x)-g(x))+g(x)\in\widehat{\dot{I}}$. Jadi $f(x)\in\widehat{I}$. Untuk $r=k+2$ maka $r>k$ akibatnya $a\in I_k$ sehingga dapat ditulis $a=c_1a_{k1}+c_2a_{k2}+\ldots+c_{s_k}a_{ks_k}$. Perhatikan polinomial

$$
\begin{aligned}
g(x) &= \sum_{i=1}^{s_k} c_i x^{r-k} f_{ri}(x) \in \widehat{I} \\
&= c_1x^{k+2-k}f_{k1}(x)+c_2x^{k+2-k}f_{k2}(x)+\ldots+c_{s_k}x^{k+2-k}f_{ks_k}(x) \\
&= c_1x^2f_{k1}(x)+c_2x^2f_{k2}(x)+\ldots+c_{s_k}x^2f_{ks_k}(x) \\
&= c_1x^2\left(b_{10}+b_{11}x+\ldots+a_{k1}x^k\right)+c_2x^2\left(b_{20}+b_{21}x+\ldots+a_{k2}x^k\right) \\
&+\ldots+c_{s_k}x^2\left(b_{s_k0}+b_{s_k1}x+\ldots+a_{ks_k}x^k\right) \\
&= (c_1b_{10}+c_2b_{20}+\ldots+c_{s_k}b_{s_k})\,x^2+(c_1b_{11}+c_2b_{21}+\ldots+c_{s_k}b_{s_k1})\,x^3 \\
&+\ldots+(c_1a_{k1}+c_2a_{k2}+\ldots+c_{s_k}a_{ks_k})\,x^{k+2} \\
&= (c_1b_{10}+c_2b_{20}+\ldots+c_{s_1}b_{s_1})\,x^2+(c_1b_{11}+c_2b_{21}+\ldots+c_{s_2}b_{s_21})\,x^3 \\
&+\ldots+ax^{k+2},
\end{aligned}
$$

sehingga diperoleh $lc(g(x))=a$ akibatnya $\deg f(x)-g(x)<r=k+2$, berdasarkan langkah sebelumnya $f(x)-g(x)\in\widehat{I}$. Karena $f(x)-g(x)\in\widehat{I}$ dan $g(x)\in\widehat{I}$ maka $(f(x)-g(x))+g(x)\in\widehat{\dot{I}}$. Jadi $f(x)\in\widehat{I}$. Sehingga berdasarkan induksi terhadap r untuk $r>k$ dapat diperoleh, misalkan $\deg(h(x))=r$ untuk $k<r<n$, maka $h(x)\in\widehat{I}$. Untuk $r=n$, karena $a=lc(f(x))$ dan $r>k$ maka $a\in I_k$ sehingga dapat ditulis $a=c_1a_{k1}+c_2a_{k2}+\ldots+c_{s_k}a_{ks_k}$. Perhatikan polinomial

$$
\begin{aligned}
g(x) &= \sum_{i=1}^{s_k} c_i x^{r-k} f_{ri}(x) \in \widehat{I} \\
&= c_1 x^{n-k} f_{k1}(x) + c_2 x^{n-k} f_{k2}(x) + \ldots + c_{s_k} x^{n-k} f_{ks_k}(x) \\
&= c_1 x^{n} f_{k1}(x) + c_2 x^{n} f_{k2}(x) + \ldots + c_{s_k} x^{n} f_{ks_k}(x) \\
&= c_1 x^n \left(b_{10} + b_{11}x + \ldots + a_{k1}x^k\right) + c_2 x^n \left(b_{20} + b_{21}x + \ldots + a_{k2}x^k\right) \\
&+ \ldots + c_{s_k} x^n \left(b_{s_k 0} + b_{s_k 1}x + \ldots + a_{ks_k}x^k\right) \\
&= \left(c_1 b_{10} + c_2 b_{20} + \ldots + c_{s_k} b_{s_k}\right) x^n + \left(c_1 b_{11} + c_2 b_{21} + \ldots + c_{s_k} b_{s_k 1}\right) \\
&x^{n+1} + \ldots + \left(c_1 a_{k1} + c_2 a_{k2} + \ldots + c_{s_k} a_{ks_k}\right) x^{k+n} \\
&= \left(c_1 b_{10} + c_2 b_{20} + \ldots + c_{s_1} b_{s_1}\right) x^n + \left(c_1 b_{11} + c_2 b_{21} + \ldots + c_{s_2} b_{s_2 1}\right) \\
&x^{n+1} + \ldots + a x^{k+n},
\end{aligned}
$$

sehingga diperoleh $lc(g(x)) = a$ akibatnya $\deg f(x) - g(x) < r = n$, berdasarkan hipotesis $f(x) - g(x) \in \widehat{I}$. Karena $f(x) - g(x) \in \widehat{I}$ dan $g(x) \in \widehat{I}$ maka $(f(x) - g(x)) + g(x) \in \widehat{\dot{I}}$. Jadi $f(x) \in \widehat{I}$. Akibatnya berdasarkan induksi terhadap r dapat diperoleh $f(x) \in \widehat{I}$. Jadi diperoleh $I \subseteq \widehat{\dot{I}}$. Tahap selanjutnya menunjukkan kebalikannya. Karena $\widehat{I} = \langle f_{mj}(x) \rangle$ dengan $f_{mj} \in I$ dan I merupakan ideal maka jelas bahwa $\widehat{I} \subseteq I$. Jadi diperoleh $I = \widehat{I}$. Jadi dapat disimpulkan bahwa I dibangun secara hingga. Karena setiap ideal di $R[x]$ dibangun secara hingga, maka berdasarkan definisi Noether, $R[x]$ merupakan gelanggang Noether. ■

Aljabar Weyl $A_1(K)$ merupakan polinomial dengan 2 indeterminates tak komutatif dengan koefisien terletak di K yang merupakan suatu lapangan. Karena K lapangan maka K merupakan suatu division ring akibatnya K hanya memiliki ideal 0 dan dirinya sendiri, K. Sehingga rantai naik ideal di K merupakan rantai naik yang stabil, akibatnya K merupakan gelanggang Noether. Berdasarkan Toerema 13, $K[y]$ merupakan gelanggang Noether.

$A_1(K)$ dapat dipandang sebagai polinomial dengan indeterminates x atas $K[y]$ yaitu $A_1[K] = K[y][x]$, akibatnya dimiliki polinomial dengan indeterminates x dengan koefisien pada $K[y]$ dengan $fx \neq xf$ untuk setiap $f \in K[y]$. Dengan sedikit variasi terhadap bukti Teorema 13 akan ditunjukkan bahwa $A_1(K) = K[y][x]$ merupakan gelanggang Noether.

Diketahui $K[y]$ merupakan gelanggang Noether, dan setiap elemen di $A_1(K)$ dapat ditulis dalam bentuk $\sum f_i x^i$ dengan $f_i \in K[y]$. Misalkan I ideal dari $A_1(K)$ dan misalkan I_n himpunan koefisien-koefisien tertinggi dari elemen di I dengan derajat n. Pertama akan ditunjukkan I_n ideal di $K[y]$. Misalkan $f, g \in I_n$ maka ada $f_0 + f_1 x +$

$f_2x^2 + \ldots + fx^n, g_0 + g_1x + g_2x^2 + \ldots + gx^n \in I$ sehingga

$$\left(f_0 + f_1x + f_2x^2 + \ldots + fx^n\right) + \left(g_0 + g_1x + g_2x^2 + \ldots + gx^n\right) =$$

$$(f_0 + g_0) + (f_1 + g_1)\,x + (f_2 + g_2)\,x^2 + \ldots + (f + g)\,x^n$$

sehingga $f + g \in I_n$. Misalkan $h \in K[y]$ sehingga

$$h\left(f_0 + f_1x + f_2x^2 + \ldots + fx^n\right) = hf_0 + hf_1x + hf_2x^2 + \ldots + hfx^n$$

dan

$$\left(f_0 + f_1x + f_2x^2 + \ldots + fx^n\right)h = f_0h + f_1xh + f_2x^2h + \ldots + fx^nh$$

dengan sifat aljabar weyl $xf(y) = f(y)\,x + \dfrac{df}{dy}$ dapat diperoleh

$$f_0h + f_1xh + f_2x^2h + \ldots + fx^nh = f_0h + \ldots + fhx^n$$

Akibatnya $hf, fh \in I_n$. Jadi I_n ideal di $K[y]$

Misalkan $f \in I_n$ sehingga dapat diperoleh $f_0+f_1x+f_2x^2+\ldots+fx^n \in I$, karena I ideal di $A_1(K)$ maka $(f_0 + f_1x + f_2x^2 + \ldots + fx^n)\,x \in I$ sehingga diperoleh $f_0x + f_1x^2 + f_2x^3 + \ldots + fx^{n+1} \in I$ akibatnya $f \in I_{n+1}$. Jadi dapat disimpulkan $I_n \subseteq I_{n+1}$.

Misalkan $L_0 \subseteq L_1 \subseteq \ldots$ merupakan rantai naik ideal di $A_1(K)$. Notasikan L_{in} sebagai himpunan koefisien tertinggi pada L_i dengan derajat n. Karena $L_0 \subseteq L_1 \subseteq \ldots$ dan karena $I_n \subseteq I_{n+1}$ maka dapat diperoleh $L_{in} \subseteq L_{in+1}$ akibatnya $L_{ij} \subseteq L_{km}$ jika $i \leq k$ dan $j \leq m$. Perhatikan rantai naik ideal $L_{11} \subseteq L_{22} \subseteq L_{33} \subseteq \ldots$ karena L_{ii} ideal di $K[y]$, dan $K[y]$ Noether maka rantai naik tersebut stabil, misalkan pada L_{jj}. Untuk setiap n dengan $0 \leq n \leq j-1$, perhatikan rantai naik $\{L_{in} | i \geq 0\}$, jika diuraikan

untuk $n = 0$ $\quad L_{00} \subseteq L_{10} \subseteq L_{20} \subseteq \ldots$
untuk $n = 1$ $\quad L_{01} \subseteq L_{11} \subseteq L_{21} \subseteq \ldots$
untuk $n = 2$ $\quad L_{02} \subseteq L_{12} \subseteq L_{22} \subseteq \ldots$
$\vdots$
untuk $n = j-1$ $\quad L_{0j-1} \subseteq L_{1j-1} \subseteq L_{2j-1} \subseteq \ldots$

Karena L_{ij} ideal di $K[y]$ Noether maka rantai naik di atas stabil untuk setiap rantai, misalkan rantai tersebut stabil pada L_{k_nn} untuk setiap n. Pilih $m = \max\{j, k_0, k_1, \ldots, k_{j-1}\}$, akibatnya untuk $i \geq m$ dan untuk setiap $n \geq 0$ berlaku $L_{in} = L_{mn}$. Karena n berlaku untuk setiap maka dapat ditulis $L_0 \subseteq L_1 \subseteq L_2 \subseteq \ldots \subseteq L_m = L_{m+1} = \ldots$ artinya rantai naik ideal $\{L_i | i \geq 0\}$ stabil pada L_m. Jadi $A_1(K)$ gelanggang Noether.

Dari penjelasan di atas dapat disimpulkan bahwa aljabar Weyl $A_1(K)$ memenuhi gelanggang Noether dan gelanggang Prim. Jadi aljabar Weyl $A_1(K)$ merupakan contoh dari gelanggang Noether Prim. Tetapi karena aljabar Weyl $A_1(K)$ tidak bersifat komutatif karena $xy \neq yx$

maka Aljbar Weyl $A_1(K)$ bukan daerah integral, akibatnya aljabar Weyl $A_1(K)$ bukan Daerah Dedekind.

Daftar Pustaka

1. Adkins, William A & Weintraub Steveh H, Algebra An Aprroach via Module Theory, Springer-Verlag, New York, 1992
2. Coutinho, S.C., The Many Avatars of Simple Algebra, The American Mahtematical Monthly, vol 104, 7(1997),593-604.
3. Herstein, I.N., Topics in Algebra, Second Edition, John Wiley & Sons, Singapore, 1975.
4. Hungerford, Algebra, Springer-Verlag, New York, 1992.
5. Lam, T.Y., A First Course in Noncommutative Rings, Springer-Verlag, New York, 1991.
6. Lang, Serge, Algebra, Third Edition, Addison Wesley, New York, 1991.
7. McConnell, J.C & J.C Robinson, Noncommutative Noetherian Rings, John Wiley & Sons, New York, 1987.
8. Wulandari, Teduh, Hubungan daerah ideal utama dan daerah Dedekind, disampaikan pada kegiatan *Conference on Statistical and Mathematical Sciences of Islamic Society in South East Asia Region* pada tanggal 25-26 April 2003.
9. Wulandari, Teduh, Contoh Daerah Dedekind, disampaikan pada kegiatan sesi poster Departemen Matematika, IPB pada tanggal 15 September 2004.
10. Wulandari, Teduh, Gelanggang Herediter, *Jurnal Matematika dan Aplikasinya*, vol 3, No.2, Desember, 2004.
11. Wulandari, Teduh, Hubungan Daerah Dedekind dengan Gelanggang HNP, *Jurnal Matematika dan Aplikasinya*, vol 5, No. 1, Juli, 2006.

..