

PEMODELAN SELANG KELAHIRAN ANAK PERTAMA

HADI SUMARNO, RETNO BUDIARTI, DAN SISWANDI

Departemen Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam,
Institut Pertanian Bogor
Jln. Meranti, Kampus IPB Dramaga, Bogor 16680, Indonesia

Abstrak : Analisis data kependudukan merupakan salah satu komponen penting dalam bidang sosial dan ekonomi. Karakteristik demografi yang memiliki peran penting dalam pertumbuhan penduduk ialah fertilitas, disamping mortalitas dan migrasi. Salah satu faktor yang menentukan tingkat fertilitas adalah selang waktu antara umur menikah dan umur kelahiran anak pertama. Tujuan penelitian ini adalah untuk menemukan model selang kelahiran anak pertama. Berdasarkan sebaran umur perkawinan pertama dan umur kelahiran anak pertama, diperoleh sebaran bagi selang kelahiran anak pertama. Dengan mengasumsikan peristiwa perkawinan dan kelahiran tidak saling bebas, menghasilkan model yang lebih sesuai dibanding dengan model berdasarkan asumsi saling bebas. Hasil analisis menunjukkan bahwa berdasarkan asumsi ketidakbebasan antara peristiwa perkawinan dan kelahiran, ternyata selang kelahiran anak pertama juga mendekati sebaran Coale-McNeil, dengan kepencongan dan kurtosis yang sama dengan model kelahiran anak pertama. Akhirnya dapat disimpulkan bahwa penelitian ini telah berhasil menemukan sebaran bagi selang kelahiran anak pertama yang dapat digunakan untuk analisis data kelompok maupun analisis data individu. Selanjutnya hasil penelitian ini diharapkan dapat dimanfaatkan untuk dikembangkan menjadi model dengan kovariat yang dapat digunakan untuk mempelajari dan menjelaskan faktor-faktor yang mempengaruhi selang kelahiran anak pertama.

Katakunci:

1. PENDAHULUAN

Analisis data kependudukan merupakan salah satu komponen penting dalam bidang sosial dan ekonomi. Karakteristik demografi penduduk di suatu wilayah dapat mempengaruhi dan dipengaruhi oleh faktor sosial ekonominya. Salah satu karakteristik demografi yang sangat besar perannya dalam pertumbuhan penduduk adalah fertilitas. Pasangan yang baru menikah secara umum ingin segera mendapatkan anak pertama. Dengan kata lain, selang waktu antara umur menikah dan umur kelahiran anak pertama dapat digunakan sebagai indikator kesuburan bagi wanita.

Berdasarkan latar belakang tersebut, dirasa perlu untuk mencari sebaran dari selang kelahiran anak pertama. Tetapi permasalahannya adalah penentuan sebaran bagi selang kelahiran anak pertama bukan merupakan hal yang mudah. Hal tersebut disebabkan oleh adanya fakta bahwa sebagian wanita yang telah menikah belum mempunyai anak pertama, sehingga selang yang dihadapi adalah selang terbuka. Untuk mengatasi kesulitan tersebut, berbagai upaya telah dilakukan. Salah satu diantaranya adalah dengan menggunakan *survival model* untuk mencari faktor-faktor yang mempengaruhi selang kelahiran anak pertama. Kerana sebaran dari selang kelahiran anak pertama belum ditemukan, pada umumnya metode yang digunakan dalam survival model tersebut adalah metode non parametrik, seperti model proporsional hazard Cox. Alternatif lain yang dapat dilakukan adalah mencari bentuk sebaran dari selang kelahiran anak pertama agar analisis dengan metode parametrik dapat dilakukan.

Menurut Basu (1993), selang kelahiran anak pertama ditentukan oleh umur menikah. Wanita yang menikah pada umur muda, secara umum memiliki selang kelahiran anak pertama yang lebih lebar dibandingkan dengan wanita yang menikah pada umur yang lebih tua. Pada penelitian yang sama, didapati juga bahwa perbedaan wilayah merupakan faktor yang penting dalam menentukan selang kelahiran anak pertama. Upaya memodelkan selang kelahiran anak pertama telah banyak dilakukan, diantaranya adalah *survival model* atau model Rantai Markov (Bhattacharya et al., 1988; Suchindran dan Koo, 1992).

Berdasarkan permasalahan tersebut, tujuan dari penelitian ini adalah mendapatkan model selang kelahiran anak pertama, melalui transformasi dari model umur perkawinan pertama dan model umur kelahiran anak pertama.

2. METODE PENELITIAN

Data yang digunakan dalam penelitian ini bersumber pada hasil Survei Demografi dan Kesehatan Indonesia tahun 1991 (SDKI 91). Adapun wilayah yang digunakan adalah Jawa dan Bali. Wilayah Jawa dan Bali yang berpenduduk lebih dari dua pertiga seluruh penduduk di Indonesia diperkirakan memiliki permasalahan yang serius, baik dari segi kependudukan khususnya, maupun permasalahan sosial dan ekonomi pada umumnya. Variabel yang digunakan adalah umur responden, umur perkawinan pertama, dan umur kelahiran anak pertama.

Sebaran selang kelahiran anak pertama dibangun dengan melakukan transformasi, yaitu selisih antara umur kelahiran anak pertama dan umur perkawinan pertama. Keeratan hubungan antara umur perkawinan pertama dan umur kelahiran anak pertama diperiksa dengan menggunakan analisis korelasi.

3. PEMBENTUKAN MODEL SELANG KELAHIRAN ANAK PERTAMA

3.1 Notasi. Dalam penelitian ini digunakan notasi sebagai berikut.

- X : menyatakan peubah acak bagi umur perkawinan pertama.
- x_o : menyatakan umur paling muda menikah
- W : $X - x_o$
- Y : menyatakan peubah acak bagi umur kelahiran anak pertama
- S : menyatakan peubah acak bagi selang kelahiran anak pertama
- α, λ, θ : parameter model sehingga $\mu = \theta - \frac{1}{\lambda} \Psi\left(\frac{\alpha}{\lambda}\right)$ dan $\sigma^2 = \frac{1}{\lambda^2} \Psi'\left(\frac{\alpha}{\lambda}\right)$
- μ, σ^2 : nilai tengah dan ragam
- Ψ, Ψ' : fungsi gamma dan digamma

3.2 Model Selang Kelahiran Anak Pertama. Telah dibicarakan sebelumnya bahwa untuk membentuk model selang kelahiran anak pertama, dapat diperoleh dengan melakukan transformasi dari model umur perkawinan pertama dengan model umur kelahiran anak pertama. Referensi [16] menguraikan model umur perkawinan pertama sebagai berikut

$$g(x) = \frac{\lambda}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{\lambda}\right)} \exp\left(-\lambda x\right) \exp\left(-\lambda x\right) = CN(\lambda, \alpha_x, \theta_x) \tag{1}$$

dan model umur kelahiran anak pertama sebagai berikut

$$g(y) = \frac{\lambda}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{\lambda}\right)} \exp\left(-\lambda y\right) \exp\left(-\lambda y\right) = CN(\lambda, \alpha_y, \theta_y) \tag{2}$$

Berikut ini disajikan model selang kelahiran anak pertama dengan asumsi peristiwa perkawinan dan peristiwa kelahiran saling bebas, dan model dengan asumsi peristiwa perkawinan dan peristiwa kelahiran tidak saling bebas.

3.2.1 Model dengan Asumsi Perkawinan dan Kelahiran Saling Bebas.

Misalkan X menyatakan peubah acak umur kelahiran anak pertama dan Y menyatakan peubah acak perkawinan pertama yang masing-masing menyebar Coale-Mc Neil, yaitu

$$\begin{aligned} X &\sim CN(\lambda, \alpha, \theta) \\ Y &\sim CN(\lambda, \alpha, \theta) \end{aligned}$$

Dengan melakukan transformasi $S = Y - X$ dan dengan mengasumsikan X dan Y saling bebas, diperoleh sebaran bagi peubah acak selang kelahiran anak pertama S dengan fungsi kepekatan peluang sebagai berikut.

$$f(s) = \lambda \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha_X + \alpha_Y}{\lambda}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha_X}{\lambda}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha_Y}{\lambda}\right)} \exp(\alpha_X \theta_X + \alpha_Y \theta_Y - \alpha_Y s) \left\{ \exp[-\lambda(s - \theta_Y)] + \exp(\lambda \theta_Y) \right\}^{-\left(\frac{\alpha_X + \alpha_Y}{\lambda}\right)}. \quad (3)$$

Bukti : Misalkan $V = \lambda Y - \lambda X \Leftrightarrow V = \lambda(Y - X)$ dan $W = \lambda X$ sehingga $Y = \frac{V+W}{\lambda}$ dan $X = \frac{W}{\lambda}$ dengan Jacobian $|J| = \frac{1}{\lambda^2}$. Dengan mengasumsikan peubah acak X dan Y saling bebas, maka fungsi kepekatan peluang bersamanya diperoleh sebagai berikut.

$$f(x, y) = \frac{\lambda^2}{\Gamma\left(\frac{\alpha_X}{\lambda}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha_Y}{\lambda}\right)} \exp\left\{[-\alpha_X(X - \theta_X) - \alpha_Y(Y - \theta_Y)] - \exp[-\lambda(X - \theta_X)] - \exp[-\lambda(Y - \theta_Y)]\right\} \quad (4)$$

Selanjutnya fungsi kepekatan peluang bersama V dan W adalah

$$f(v, w) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{\alpha_X}{\lambda}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha_Y}{\lambda}\right)} \exp\left[\alpha_X \theta_X + \alpha_Y \theta_Y - \frac{\alpha_Y}{\lambda} v - w\left(\frac{\alpha_X + \alpha_Y}{\lambda}\right)\right] \exp\left[-\exp(-w)(\exp(-v + \lambda \theta_Y) + \exp(\lambda \theta_X))\right] \quad (5)$$

Misalkan $U = \exp(-W)(\exp(-V + \lambda \theta_Y) + \exp(\lambda \theta_X))$, maka $f(v) = \int_{-\infty}^{\infty} f(v, w) dw$ dapat diperoleh sebagai berikut.

$$f(v) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{\alpha_X}{\lambda}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha_Y}{\lambda}\right)} \exp\left[\alpha_X \theta_X + \alpha_Y \theta_Y - \frac{\alpha_Y}{\lambda} v\right] \left[\exp(-v + \lambda \theta_Y) + \exp(\lambda \theta_X)\right]^{-\left(\frac{\alpha_X + \alpha_Y}{\lambda}\right)} \left[\int_0^{\infty} u^{\left(\frac{\alpha_X + \alpha_Y}{\lambda}\right)-1} \exp(-u) du\right]. \quad (6)$$

Karena $\int_0^{\infty} u^{\left(\frac{\alpha_X + \alpha_Y}{\lambda}\right)-1} \exp(-u) du = \Gamma\left(\frac{\alpha_X + \alpha_Y}{\lambda}\right)$, akibatnya

$$f(v) = \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha_X + \alpha_Y}{\lambda}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha_X}{\lambda}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha_Y}{\lambda}\right)} \exp\left[\alpha_X \theta_X + \alpha_Y \theta_Y - \frac{\alpha_Y}{\lambda} v\right] \left[\exp(-v + \lambda \theta_Y) + \exp(\lambda \theta_X)\right]^{-\left(\frac{\alpha_X + \alpha_Y}{\lambda}\right)}. \quad (7)$$

Dengan melakukan transformasi lebih lanjut , yaitu $V = \lambda S$, diperoleh sebaran bagi selang kelahiran anak pertama sebagai berikut.

$$f(s) = \lambda \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha_x + \alpha_y}{\lambda}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha_x}{\lambda}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha_y}{\lambda}\right)} \exp(\alpha_x \theta_x + \alpha_y \theta_y - \alpha_y s) \left\{ \exp[-\lambda(s - \theta_y)] + \exp(\lambda \theta_x) \right\}^{-\left(\frac{\alpha_x + \alpha_y}{\lambda}\right)}. \tag{8}$$

Selanjutnya dengan menggunakan metode pembangkit momen, diperoleh nilai tengah, ragam, kepencongan, dan kurtosis dari sebaran selang kelahiran anak pertama sebagai berikut.

$$E[S] = \frac{1}{\lambda} \left[\Psi\left(\frac{\alpha_y}{\lambda}\right) - \Psi\left(\frac{\alpha_x}{\lambda}\right) \right] \tag{9}$$

$$E[S^2] = \frac{1}{\lambda^2} \left[\Psi'\left(\frac{\alpha_y}{\lambda}\right) - \Psi'\left(\frac{\alpha_x}{\lambda}\right) \right] \tag{10}$$

$$skew(s) = - \frac{\Psi''\left(\frac{\alpha_y}{\lambda}\right) - \Psi''\left(\frac{\alpha_x}{\lambda}\right)}{\left(\Psi'\left(\frac{\alpha_y}{\lambda}\right) - \Psi'\left(\frac{\alpha_x}{\lambda}\right)\right)^{3/2}} \tag{11}$$

$$kurt(s) = \frac{\Psi'''\left(\frac{\alpha_y}{\lambda}\right) - \Psi'''\left(\frac{\alpha_x}{\lambda}\right)}{\left(\Psi'\left(\frac{\alpha_y}{\lambda}\right) - \Psi'\left(\frac{\alpha_x}{\lambda}\right)\right)^2}. \tag{12}$$

3.2.2 Model dengan Asumsi Perkawinan dan Kelahiran Tidak Saling Bebas. Model dengan asumsi bahwa perkawinan dan kelahiran tidak saling bebas lebih realistis, karena kenyataannya umur kelahiran anak pertama dipengaruhi oleh umur perkawinan pertama. Dalam hal ini ketidakbebasan antara X dan Y diasumsikan sebagai berikut.

$$Y \sim \text{Exp}(\lambda) \quad ; \quad X \sim \text{Exp}(\lambda) \quad ; \quad \rho = \text{Corr}(X, Y),$$

dengan ρ adalah korelasi antara X dan Y .

Berdasarkan asumsi tersebut akan ditunjukkan bahwa untuk nilai korelasi yang besar, peubah acak selang kelahiran anak pertama (S) menyebar menurut sebaran Coale-McNeil sebagai berikut.

$$S \sim CN\left(\frac{\lambda}{\sqrt{1-\rho^2}}, \frac{\alpha_y}{\sqrt{1-\rho^2}}, \theta_y - \theta_x \lambda\right) \tag{13}$$

Bukti : Andaikan $g(x)$ dan $g(y)$ berturut-turut menyatakan sebaran bagi umur perkawinan pertama dan umur kelahiran anak pertama, dengan :

$$g(x) = \frac{\lambda_{ox}}{\Gamma\left(\frac{\alpha_x}{\lambda}\right)} \exp\left\{-\alpha_x \left[\frac{x - \mu_x}{\sigma_x} + \frac{\Psi\left(\frac{\alpha_x}{\lambda}\right)}{\sqrt{\Psi'\left(\frac{\alpha_x}{\lambda}\right)}}\right]\right\} - \exp\left\{-\lambda_{ox} \left[\frac{x - \mu_x}{\sigma_x} + \frac{\Psi\left(\frac{\alpha_x}{\lambda}\right)}{\sqrt{\Psi'\left(\frac{\alpha_x}{\lambda}\right)}}\right]\right\}, \quad (14)$$

$$g(y) = \frac{\lambda_{oy}}{\Gamma\left(\frac{\alpha_y}{\lambda}\right)} \exp\left\{-\alpha_{oy} \left[\frac{y - \mu_y}{\sigma_y} + \frac{\Psi\left(\frac{\alpha_y}{\lambda}\right)}{\sqrt{\Psi'\left(\frac{\alpha_y}{\lambda}\right)}}\right]\right\} - \exp\left\{-\lambda_{oy} \left[\frac{y - \mu_y}{\sigma_y} + \frac{\Psi\left(\frac{\alpha_y}{\lambda}\right)}{\sqrt{\Psi'\left(\frac{\alpha_y}{\lambda}\right)}}\right]\right\}, \quad (15)$$

Fungsi $g(y)$ dapat juga dituliskan sebagai fungsi dari parameter μ dan σ sebagai berikut.

$$g(y) = \frac{\lambda_{oy}}{\Gamma\left(\frac{\alpha_y}{\lambda}\right)} \exp\left\{-\alpha_{oy} \left[\frac{y - \mu_y}{\sigma_y} + \frac{\Psi\left(\frac{\alpha_y}{\lambda}\right)}{\sqrt{\Psi'\left(\frac{\alpha_y}{\lambda}\right)}}\right]\right\} - \exp\left\{-\lambda_{oy} \left[\frac{y - \mu_y}{\sigma_y} + \frac{\Psi\left(\frac{\alpha_y}{\lambda}\right)}{\sqrt{\Psi'\left(\frac{\alpha_y}{\lambda}\right)}}\right]\right\}, \quad (16)$$

dengan $\alpha_{oy} = \frac{\alpha_y}{\lambda} \sqrt{\Psi'\left(\frac{\alpha_y}{\lambda}\right)}$ dan $\lambda_{oy} = \sqrt{\Psi'\left(\frac{\alpha_y}{\lambda}\right)}$.

Andaikan pula peubah acak Y dipengaruhi secara linear oleh peubah acak X dengan keeratan hubungan sebesar ρ dan bentuk hubungan : $\mu_{y|x} = \beta_0 + \beta_1 x$;

$$\sigma_{y|x} = \sigma_y \sqrt{1 - \rho^2}.$$

Berdasarkan informasi tersebut, diperoleh fungsi kepekatan peluang bersyarat bagi peubah acak Y untuk $X=x$ sebagai berikut.

$$g(y|x) = \frac{\lambda_{y|x}}{\Gamma\left(\frac{\alpha_y}{\lambda}\right)} \exp\left\{-\alpha_{oy} \left[\frac{y - \beta_0 - \beta_1 x}{\sigma_y \sqrt{1 - \rho^2}} + \frac{\Psi\left(\frac{\alpha_y}{\lambda}\right)}{\sqrt{\Psi'\left(\frac{\alpha_y}{\lambda}\right)}}\right]\right\} - \exp\left\{-\lambda_{oy} \left[\frac{y - \beta_0 - \beta_1 x}{\sigma_y \sqrt{1 - \rho^2}} + \frac{\Psi\left(\frac{\alpha_y}{\lambda}\right)}{\sqrt{\Psi'\left(\frac{\alpha_y}{\lambda}\right)}}\right]\right\} \quad (17)$$

Dengan melakukan substitusi $\beta_o = \mu_Y - \mu_X \rho \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}$ dan $\beta_1 = \rho \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}$, diperoleh persamaan sebagai berikut.

$$g(y|x) = \frac{\lambda_{oy}}{\Gamma\left(\frac{\alpha_Y}{\lambda}\right)} \exp\left\{\left[-\alpha_{Y|x}(y-\theta_{Y|x}) + \frac{\alpha_X^*}{\sqrt{1-\rho^2}}\rho(x-\theta_X)\right] - \exp\left[-\lambda_{Y|x}(y-\theta_{Y|x}) + \frac{\lambda_X^*}{\sqrt{1-\rho^2}}\rho(x-\theta_X)\right]\right\}, \tag{18}$$

dengan

$$\alpha_{Y|x} = \frac{\alpha_{oY}}{\sigma_Y \sqrt{1-\rho^2}}; \lambda_{Y|x} = \frac{\lambda_{oY}}{\sigma_Y \sqrt{1-\rho^2}}; \alpha_X^* = \frac{\alpha_{oY}}{\sigma_X}; \lambda_X^* = \frac{\lambda_{oY}}{\sigma_X}; \lambda_{oY} = \lambda \sigma_Y$$

dan

$$\theta_{Y|x} = \mu_Y - \sigma_Y \sqrt{1-\rho^2} \frac{\Psi\left(\frac{\alpha_Y}{\lambda}\right)}{\sqrt{\Psi'\left(\frac{\alpha_Y}{\lambda}\right)}} - \frac{\sigma_Y}{\lambda \sigma_X} \Psi\left(\frac{\alpha_X}{\lambda}\right).$$

Selanjutnya, berdasarkan asumsi ketidakbebasan antara perkawinan dan kelahiran, akan ditunjukkan bahwa $S=Y-X$ menyebar mendekati sebaran Coale-McNeil.

Misalkan $V = \lambda Y - \lambda X \Leftrightarrow V = \lambda(Y - X)$ dan $W = \lambda X$, sehingga $Y = \frac{V+W}{\lambda}$ dan $X = \frac{W}{\lambda}$ dengan Jacobian $|J| = \frac{1}{\lambda^2}$. Karena antara X dan Y tidak saling bebas, maka $g(x, y) = g(x)g(y|x)$, yaitu

$$g(x, y) = \frac{\lambda \lambda_{Y|x}}{\Gamma\left(\frac{\alpha_X}{\lambda}\right) \Gamma\left(\frac{\alpha_Y}{\lambda}\right)} \exp\left\{\left[-\alpha_{Y|x}(y-\theta_{Y|x}) + \left(\frac{\alpha_X^*}{\sqrt{1-\rho^2}}\rho - \alpha_X\right)(x-\theta_X)\right] + A\right\}. \tag{19}$$

Dengan $A = \left[-\exp(-\lambda(x-\theta_X)) - \exp\left(-\lambda_{Y|x}(y-\theta_{Y|x}) + \frac{\lambda_X^* \rho}{\sqrt{1-\rho^2}}(x-\theta_X)\right)\right]$.

Selanjutnya fungsi kepadatan peluang bersama V dan W adalah

$$g(v, w) = \frac{\lambda_{Y|x}}{\lambda \Gamma\left(\frac{\alpha_X}{\lambda}\right) \Gamma\left(\frac{\alpha_Y}{\lambda}\right)} \exp \left\{ \left[-\frac{\alpha_{Y|x}}{\lambda} v - \left(\frac{\alpha_{Y|x}}{\lambda} - \frac{\alpha_X^* \rho}{\lambda \sqrt{1-\rho^2}} \right) w \right] \exp \left[\left(\alpha_X \theta_X - \frac{\alpha_X^* \rho}{\sqrt{1-\rho^2}} \theta_X \right) + \alpha_{Y|x} \theta_{Y|x} \right] + B \right\}. \quad (20)$$

dengan

$$B = \left[-\exp(-(w - \lambda \theta_X)) - \exp \left(-\frac{v}{\sqrt{1-\rho^2}} - \frac{\lambda_X^* \rho}{\sqrt{1-\rho^2}} \theta_X \right) \times \exp \left(-\frac{1-\rho \lambda_X^* / \lambda}{\sqrt{1-\rho^2}} w \right) \right]$$

Dalam Sumarno dkk (2007) diketahui bahwa $\frac{\alpha_Y}{\lambda} = 0.564$ dan $\frac{\alpha_X}{\lambda} = 0.590$, sehingga dapat diperoleh nilai dari

$$\frac{\lambda_X^*}{\lambda} = \frac{\sqrt{\Psi'\left(\frac{\alpha_Y}{\lambda}\right)}}{\sqrt{\Psi'\left(\frac{\alpha_X}{\lambda}\right)}} = 1.0663; \text{ dan } \frac{1-\rho \lambda_X^* / \lambda}{\sqrt{1-\rho^2}} w = \frac{1-1.0663\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} w.$$

Selanjutnya dapat ditunjukkan bahwa akar persamaan dari $\frac{1-1.0663\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}$ adalah $\rho=0.938$. Akibatnya persamaan (20) di atas menjadi

$$g(v, w) = \frac{\lambda_{Y|x}}{\lambda \Gamma\left(\frac{\alpha_X}{\lambda}\right) \Gamma\left(\frac{\alpha_Y}{\lambda}\right)} \exp \left\{ \left[-\frac{\alpha_{Y|x}}{\lambda} v - \left(\frac{\alpha_{Y|x}}{\lambda} - \frac{\alpha_X^* \rho}{\lambda \sqrt{1-\rho^2}} + \frac{\alpha_X}{\lambda} \right) w \right] \exp \left[\left(\alpha_X \theta_X - \frac{\alpha_X^* \rho}{\lambda \sqrt{1-\rho^2}} \theta_X + \alpha_{Y|x} \theta_{Y|x} \right) \right] + C \right\} \quad (21)$$

dengan

$$D = \exp \left[-\exp(-(w - \lambda \theta_X)) - \exp \left(-\frac{v}{\sqrt{1-\rho^2}} - \frac{\lambda_X^* \rho}{\sqrt{1-\rho^2}} \theta_X + \lambda_{Y|x} \theta_{Y|x} \right) \right]$$

Fungsi kepekatan peluang marginal $g(v)$ dapat diperoleh dengan mengintegalkan fungsi kepekatan peluang bersama $g(v, w)$ terhadap w . Karena ternyata peubah acak W menyebar $CN\left(1, \frac{\alpha_{y|x}}{\lambda} - \frac{\alpha_x^* \rho}{\lambda \sqrt{1-\rho^2}} + \frac{\alpha_x}{\lambda}, \alpha \theta_x\right)$ dan $S = \frac{V}{\lambda}$, maka diperoleh fungsi kepekatan peluang bagi peubah acak S sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
 g(s) &= \frac{\lambda}{\sqrt{1-\rho^2} \Gamma\left(\frac{\alpha_y}{\lambda}\right)} \exp\left\{-\frac{\alpha_y}{\sqrt{1-\rho^2}}(s-\theta_s) - \exp\left[-\frac{\lambda}{\sqrt{1-\rho^2}}(s-\theta_s)\right]\right\} \\
 &= CN\left(\frac{\lambda}{\sqrt{1-\rho^2}}, \frac{\alpha_y}{\sqrt{1-\rho^2}}, \theta_s\right) \\
 &= CN(\lambda_s, \alpha_s, \theta_s)
 \end{aligned}
 \tag{22}$$

4. HASIL PENYUAIAN MODEL

Pada penelitian ini, model yang telah diperoleh dicobakan dengan data SDKI 1991 wilayah Jawa-Bali. Data yang digunakan adalah data wanita pernah menikah berumur 15-49 tahun. Untuk mengurangi adanya bias dalam menyatakan umur, dilakukan pengelompokan menjadi data satu tahunan.

Tabel 1. Hasil Pendugaan Parameter Umur Perkawinan Pertama, Umur Kelahiran Anak Pertama, dan Selang Kelahiran Anak Pertama

Parameter	Model Perkawinan	Model Kelahiran	Model Selang Kelahiran Anak Pertama	
			Asumsi Saling Bebas	Asumsi Tidak Saling Bebas
μ	18.89	21.86	2.97	2.79
σ	4.88	5.21	7.14	1.49
α	0.23	0.22		0.76
λ	0.39	0.39		1.36
θ	14.96	17.48		1.54
α/λ	0.604	0.559		0.559
<i>skew</i>	2.72	2.98	0.29	2.98
<i>kurt</i>	3.47	3.75	0.28	3.75

5. INTERPRETASI HASIL

Data yang digunakan dalam penelitian ini adalah hasil Survei Demografi dan Kesehatan Indonesia tahun 1991 (SDKI 91). Wilayah yang digunakan adalah Jawa dan Bali. Variabel yang digunakan adalah umur responden wanita, umur perkawinan pertama, dan umur kelahiran anak pertama. Tabel 1 kolom 2 menunjukkan bahwa model umur perkawinan pertama wanita Jawa Bali dapat dilihat pada persamaan (23) berikut.

$$\begin{aligned} g(x) &= 0.26 \exp\{[-0.23(X - 14.96)] - \exp[-0.39(X - 14.96)]\} \\ &= CN(0.39, 0.23, 14.96) \end{aligned} \quad (23)$$

Tabel 1 kolom 3 menunjukkan bahwa model umur kelahiran anak pertama wanita Jawa Bali dapat dilihat pada persamaan (24) berikut.

$$\begin{aligned} g(y) &= 0.24 \exp\{[-0.22(Y - 17.48)] - \exp[-0.39(Y - 17.48)]\} \\ &= CN(0.39, 0.22, 17.48) \end{aligned} \quad (24)$$

Berdasarkan sebaran umur perkawinan pertama dan sebaran umur kelahiran anak pertama diperoleh sebaran bagi selang kelahiran anak pertama. Model selang kelahiran anak pertama dengan asumsi bahwa umur perkawinan pertama dan umur kelahiran anak pertama saling bebas (model 1), memiliki nilai tengah, simpangan baku, kepencongan, dan kurtosis berturut-turut 2.97 tahun, 7.14 tahun, 0.29, dan 0.28, sedangkan model dengan asumsi bahwa umur perkawinan pertama dan umur kelahiran anak pertama tidak saling bebas (model 2), memiliki nilai tengah, simpangan baku, kepencongan, dan kurtosis berturut-turut 2.79 tahun, 1.49 tahun, 2.98, dan 3.75 (lihat Tabel 1).

Model dengan asumsi peristiwa perkawinan dan kelahiran tidak saling bebas, merupakan model yang sesuai untuk memodelkan selang kelahiran anak pertama. Model dengan asumsi saling bebas, memiliki tingkat kepencongan yang sangat rendah. Hal tersebut menggambarkan suatu keadaan bahwa setiap wanita yang telah menikah tidak segera melahirkan anak pertama hingga mencapai usia tertentu. Keadaan ini tidak sesuai fakta bahwa secara umum wanita yang telah menikah cenderung untuk segera melahirkan anak pertamanya. Dengan melakukan modifikasi, yakni dengan mengasumsikan proses ketidakbebasan antara peristiwa perkawinan dan kelahiran, dapat memperbaiki model yang ada. Dengan mencobakan model terhadap data Jawa dan Bali, diperoleh fungsi kepekatian peluang selang kelahiran anak pertama sebagai berikut.

$$\begin{aligned} g(s) &= 0.85 \exp\{-0.76(s - 1.54) - \exp[-1.36(s - 1.54)]\} \\ &= CN(1.36, 0.76, 1.54) \end{aligned}$$

Selanjutnya, untuk memeriksa ketepatan model terhadap data, dilakukan pengujian Kolmogorov-Smirnov, dan dihasilkan statistik $D = 0.393$. Hal tersebut berarti bahwa model dapat menyuai data dengan baik.

6. KESIMPULAN

Pada penelitian ini telah berhasil ditentukan sebaran bagi selang kelahiran anak pertama yang dapat digunakan untuk analisis data kelompok maupun untuk analisis data individu. Hasil penelitian ini diharapkan dapat dimanfaatkan untuk hal-hal berikut.

- Karena sifatnya yang parametrik dan kontinu, maka model selang kelahiran anak pertama berpotensi untuk dikembangkan menjadi model dengan kovariat.
- Karena model tersebut dapat dikembangkan menjadi model dengan kovariat, maka model ini bermanfaat untuk mempelajari dan menjelaskan faktor-faktor yang mempengaruhi selang kelahiran anak pertama.

DAFTAR PUSTAKA

- [1]. **Battacharya, B.N, C.M. Pandey, and K.K. Singh. 1988.** Model for First Birth Interval and Sime Social Factors. *Mathematical Biosciences* 92:29-53.
- [2]. **Bloom, D.E. 1982.** What's Happening to The Age at First Birth in the United States? A Study of Recent Cohorts. *Demography* 19(3):361-371.
- [3]. **Basu, A.M. 1993.** Cultural Influences on the Timing of First Birth s in India : Large Differences that add up to Little Difference. *Population Studies* 47:85-95
- [4]. **Chen, R. and S.P. Morgan. 1991.** Recent Trends in the Timing of First Births in the United States. *Demography* 28(4): 513 -- 533.
- [5]. **Coale, A.J., and D.R. McNeil. 1972.** The Distribution by Age at First Marriage in a Female Cohort. *Journal of the American Statistical Association* 67:743-749.
- [6]. **Gilchrist, W. 1984.** *Statistical Modelling*. Chichester: John Wiley, New York.
- [7]. **Henry, L. 1961.** Some Data on Natural Fertility. *Eugenic Quarterly* 18:81-91.
- [8]. **Henry, L. 1976.** *Population, Analysis and Models*. New York: Academic Press.
- [9]. **Jacoby, S.L.S., and J.S. Kowalik. 1980.** *Mathematical Modelling with Computers*. New Jersey: Prentice-Hall Inc.
- [10]. **Lewis, T.G., and B.J. Smith. 1979.** *Computer Principles of Modelling and Simulation*. Boston: Houghton Mifflin Company.
- [11]. **McCullagh, P. and J.A Nedler. 1989.** *Generalized Linear Model*. 2nd. London : Chapman and Hall.
- [12]. **Pressat, R. 1985.** *The Dictionary of Demography*. Wilson, C. (pnyt.). Glasgow: Bell and Bain Ltd.
- [13]. **Rodriguez, G. and J. Trussel. 1980.** Maximum Likelihood Estimation of the Parameters of Coale's Model Nuptiality Schedule from Survey Data. *Technical Bulletins*, no. 7/TECH. 1261. World Fertility Survey.
- [14]. **Suchindran, C.M. and H.P. Koo. 1992.** Age at Last Birth and Its Components. *Demography* 29(2):227-245.
- [15]. **Sumarno, H. 1997.** Pemodelan Kesan Umur Berkahwin Pertama Terhadap Fertiliti di Jawa-Bali. *Disertasi Ph.D. Universitas Kebangsaan Malaysia, Bangi*.
- [16]. **Sumarno, H, R. Budiarti, dan Siswandi. 2007.** Pemodelan Umur Kelahiran Anak Pertama. *Jurnal Matematika dan Aplikasinya* 6(1): 33-42.

- [17]. **Sumarno, H. and A.A. Jemain.** 1995. Distribution of Age at the First Marriage in Java and Bali Using Coale McNeil Model. Abstract. pp 92. 6th. International Conference Environmetrics, December 6-9, 1995. Dynasty Hotel, Kuala Lumpur, Malaysia.
- [18]. **Trent, K.** 1994. Family Context and Adolscents' expectations about Marriage, Fertility, and Non Marital Childbearing. *Social Science Quarterly* **75(2)**:319-339.
- [19]. **Trussell, J.T. and D.E. Bloom.** 1983. Estimating The Covariates of Age at Marriage and First Birth. *Population Studies* 37:402-416.
- [20]. **United Nations.** 1983. Manual X. Indirect Techniques for Demographic Estimations. Department of International Economic and Social Affairs, Population Studies, no. 81. New York: United Nations.