ANALISIS HOMOTOPI DALAM PENYELESAIAN SUATU MASALAH TAKLINEAR

JAHARUDDIN

Departemen Matematika,
Fakultas Matematika dan Imu Pengetahuan Alam,
Institut Pertanian Bogor
Jln. Meranti, Kampus IPB Dramaga, Bogor 16680, Indonesia

Abstrak : Dalam tulisan ini dibahas metode analisis homotopi yang merupakan suatu pendekatan analitik untuk menyelesaian suatu masalah taklinear. Efesiensi metode ini ditunjukkan dan dibandingkan dengan metode lain yang sudah ada. Hasil numerik menunjukkan bahwa metode homotopi dapat digunakan dan lebih baik untuk menyelesaikan suatu masalah taklinear.
Katakunci: metode homotopi, deformasi

1. PENDAHULUAN

Banyak fenomena yang terjadi di alam dapat dimodelkan dalam suatu persamaan matematika yang umumnya berbentuk taklinear. Masalah taklinear ini biasanya sulit diselesaikan baik secara analitik maupun secara numerik, karena faktor taklinear yang sangat kuat. Metode perturbasi homotopi yang diusulkan pertama kali oleh J.H.He pada tahun 1998 [2] merupakan metode yang intensif dikembangkan oleh para peneliti lainnya dalam menyelesaikan berbagai jenis masalah linear dan tak linear. Rafei dan Ganji (2006) dalam [6] menggunakan metode perturbasi homotopi untuk menentukan penyelesaian eksplisit persamaan Helmholtz dan persamaan Korteweg-de Vries (KdV) orde lima. Sedangkan Ozis dan Yildirim (2007) dalam [5] dengan metode homotopi menentukan penyelesaian persamaan KdV dalam bentuk gelombang berjalan.

Terdapat beberapa metode untuk menyelesaikan suatu masalah taklinear, seperti metode perturbasi [4] dan metode dekomposisi Adomian [1]. Dalam metode perturbasi, faktor taklinear diperlemah dengan memperkenalkan suatu parameter kecil. Hal ini tidak dilakukan pada metode dekomposisi Adomian. Dalam metode dekomposisi Adomian, penyelesaian masalah taklinear dinyatakan dalam suatu deret pangkat (polinomial) yang hanya terdefinisi pada daerah kekonvergenannya.

Dalam metode homotopi, faktor taklinear tidak perlu diperlemah seperti yang dilakukan pada metode perturbasi. Penyelesaian masalah taklinear dengan menggunakan metode homotopi adalah berupa deret, tetapi tidak perlu dimisalkan dalam bentuk deret pangkat (polinomial) seperti yang dilakukan pada metode dekomposisi Adomian.

Tulisan ini akan membahas penyelesaian suatu masalah taklinear dengan menggunakan metode homotopi yang merupakan bentuk umum dari metode perturbasi dan metode dekomposisi Adomian. Berdasarkan metode ini pula akan dibandingkan dengan penyelesaian eksaknya untuk mengetahui validitas dari metode ini. Oleh karena itu, tulisan ini akan dibagi menjadi empat bagian. Setelah bagian pertama ini, pada bagian kedua akan dibahas analisis dari metode homotopi, kemudian pada bagian ketiga akan diberikan suatu contoh kasus penyelesaian masalah taklinear dan hasil numerik disajikan untuk memperlihatkan validitas dari metode homotopi. Kesimpulan dari tulisan ini akan diberikan pada bagian akhir.

2. ANALISIS METODE

Pada bagian ini akan diuraikan konsep dasar dari metode homotopi. Untuk itu, perhatikan persamaan diferensial berikut:

$$A[y(x)] = 0, \quad x \in \Omega \tag{2.1}$$

dengan *A* suatu operator turunan yang taklinear dan *y(x)* fungsi yang akan ditentukan dan bergantung pada peubah bebas *x*. Selanjutnya didefinisikan pula suatu operator linear $\mathfrak{L}$ yang memenuhi

$$\mathfrak{L}[f] = 0, \text{ bila } f = 0. \tag{2.2}$$

Sehingga operator *A* dapat dibagi menjadi dua bagian, yaitu $\mathfrak{L}$ dan $\mathfrak{N}$ yang masing-masing merupakan operator linear dan taklinear. Jadi, persamaan diferensial (2.1) dapat ditulis:

$$\mathfrak{L}[y] + \mathfrak{N}[y] = 0.$$

Misalkan $y_0(x)$ pendekatan awal dari penyelesaian persamaan (2.1) dan $q \in [0,1]$ suatu parameter. Definisikan fungsi real $\phi(x,q) : \Omega \times [0,1] \to \mathbb{R}$, dan suatu fungsi *H* sebagai berikut:

$$H(\phi, q) = (1-q)\mathfrak{L}[\phi - y_0] + qA[\phi], \tag{2.3}$$

atau

$$H(\phi, q) = \mathfrak{L}[\phi] + q\mathfrak{N}[\phi] - (1-q)\mathfrak{L}[y_0].$$

Berdasarkan persamaan (2.3), maka untuk $q = 0$ dan $q = 1$ masing-masing memberikan persamaan berikut:

$$H(\phi(x,0), 0) = \mathfrak{L}[\phi(x,0) - y_0(x)]$$

dan

$$H(\phi(x,1),1) = A[\phi(x,1)].$$

Sehingga menurut persamaan (2.1) dan persamaan (2.2) diperoleh bahwa fungsi $\phi(x,0) = y_0(x)$ dan $\phi(x,1) = y(x)$ masing-masing merupakan penyelesaian dari persamaan

$$H(\phi(x,0),0) = 0 \text{ dan } H(\phi(x,1),1) = 0.$$

Dengan demikian peningkatan nilai *q* dari 0 ke 1 menyatakan perubahan nilai $H(\phi,q)$ dari $\mathfrak{L}[\phi - y_0]$ ke $A[\phi]$. Dalam topologi, proses ini disebut deformasi, sedangkan $\mathfrak{L}[\phi - y_0]$ dan $A[\phi]$ disebut homotopi. Selanjutnya berikut ini akan dibahas perluasan dari konsep dasar metode homotopi yang telah diuraikan di atas.

Misalkan didefinisikan fungsi $\phi(x,q,h,B)$ yang tidak hanya bergantung pada *x* dan *q*, tetapi juga bergantung pada parameter bantu $h \neq 0$ dan fungsi bantu $B(x) \neq 0$. Sehingga fungsi *H* dinyatakan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} H(\phi,q,h,B) = (1-q)\mathfrak{L}[\phi(x,q,h,B) - y_0(x)] \\ - qhB(x)A[\phi(x,q,h,B)] \end{aligned} \qquad (2.4)$$

Jika $h = -1$ dan $B(x) = 1$, maka dari persamaan (2.4) diperoleh persamaan (2.3), yaitu

$$H(\phi,q) = H(\phi,q,-1,1).$$

Selanjutnya, misalkan fungsi $\phi(x,q,h,B)$ yang akan dibahas selanjutnya adalah penyelesaian dari persamaan berikut:

$$H(\phi(x,q,h,B)) = 0$$

atau

$$(1-q)\mathfrak{L}[\phi(x,q,h,B) - y_0(x)] = qh\, B(x)A[\phi(x,q,h,B)]. \qquad (2.5)$$

Jadi, fungsi $\phi(x,q,h,B)$ tidak hanya bergantung pada parameter *q*, tetapi juga bergantung pada parameter bantu *h* dan fungsi bantu *B(x)*. Berdasarkan persamaan (2.4), maka untuk $q = 0$ dan $q = 1$ masing-masing memberikan persamaan berikut:

$$H(\phi,0,h,B) = \mathfrak{L}[\phi(x,0,h,B) - y_0(x)]$$

dan

$$H(\phi,1,h,B) = -hB(x)A[\phi(x,1,h,B)].$$

Berdasarkan persamaan (2.1) dan persamaan (2.2), maka penyelesaian dari persamaan $H(\phi,0,h,B) = 0$ dan $H(\phi,1,h,B) = 0$ masing-masing adalah:

$$y_0(x) = \phi(x,0,h,B) \text{ dan } y(x) = \phi(x,1,h,B).$$

Kedua penyelesaian di atas bergantung pada parameter bantu *h* dan fungsi bantu *B(x)* yang dapat dipilih sembarang. Pemilihan parameter bantu *h*, fungsi bantu *B(x)*, pendekatan awal $y_0(x)$, dan operator linear $\mathfrak{L}$ perlu memperhatikan validitas dari metode homotopi ini. Dengan pemilihan ini, terjamin adanya fungsi $\phi(x,q,h,B)$ dan turunan-turunannya terhadap *q* untuk setiap $q \in [0,1]$. Turunan ke *m* dari fungsi $\phi(x,q,h,B)$ terhadap *q* yang dihitung di $q=0$ adalah:

$$y_0^{(m)}(x) = \frac{d^m \phi(x,q,h,B)}{dq^m}\Big|_{q=0}$$

sehingga dinotasikan

$$y_m(x) = \frac{1}{m!} y_0^{(m)}(x) = \frac{1}{m!} \frac{d^m \phi(x,q,h,B)}{dq^m}\Big|_{q=0} .$$

Deret Taylor dari fungsi $\phi(x,q,h,B)$ terhadap *q* adalah

$$\phi(x,q,h,B) = \phi(x,0,h,B) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \frac{d^m \phi(x,q,h,B)}{dq^m}\Big|_{q=0} \; q^m$$

atau

$$\phi(x,q,h,B) = y_0(x) + \sum_{m=1}^{\infty} y_m(x).\, q^m . \qquad (2.6)$$

Selajutnya dengan pemilihan *h*, *B(x)*, $y_0(x)$ dan $\mathfrak{L}$ juga mengakibatkan kekonvergenan dari deret (2.6) di $q=1$. Jadi untuk $q=1$, dari persamaan (2.6) diperoleh

$$\phi(x,1,h,B) = y_0(x) + \sum_{m=1}^{\infty} y_m(x).$$

Karena $y(x) = \phi(x,1,h,B)$, maka diperoleh

$$y(x) = y_0(x) + \sum_{m=1}^{\infty} y_m(x).$$

Hasil ini menunjukkan hubungan antara penyelesaian eksak dari persamaan (2.1) dengan pendekatan awal $y_0(x)$ dan $y_m(x), m=1,2,\cdots$ yang akan ditentukan. Persamaan untuk menentukan $y_m(x), m=1,2,\cdots$ diperoleh sebagai berikut. Jika kedua ruas pada persamaan (2.5) diturunkan terhadap *q* hingga *m* kali dan mengevaluasi pada $q=0$ kemudian dibagi oleh $m!$, maka diperoleh persamaan berikut:

$$\mathfrak{L}[y_m(x) - \chi_m y_{m-1}(x)] = h\, B(x) R_m[\vec{y}_{m-1}] \qquad (2.7)$$

dengan $\vec{y}_m = \left(y_0, y_1, y_2, \cdots, y_m\right)$,

$$R_m[\vec{y}_{m-1}] = \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1} A[\phi(x,q,h,B)]}{dq^{m-1}}\Big|_{q=0} \qquad (2.8)$$

dan

$$\chi_m = \begin{cases} 0, & m \le 1 \\ 1, & m \text{ lainnya.} \end{cases}$$

Dengan demikian apabila diberikan masalah taklinear dengan persamaan diferensial pada persamaan (2.1) terhadap syarat awal $y(0)=0$, maka dalam metode homotopi memerlukan $y_0(x)$ sebagai pendekatan awal dari penyelesaian $y(x)$ dengan syarat awal $y_0(0)=0$. Deformasi orde nol pada persamaan (2.5) memenuhi syarat awal $\phi(0,q)=0$, dan deformasi orde m pada persamaan (2.7) memenuhi syarat awal $y_m(0)=0$.

3. APLIKASI DAN HASIL NUMERIK

Berikut ini akan diberikan aplikasi dari metode homotopi yang telah dibahas pada bagian kedua. Perhatikan suatu masalah taklinear yang dinyatakan dalam masalah nilai awal berikut:

$$\frac{dy}{dx} + xy^2 = x, \qquad y(0) = 0. \tag{3.1}$$

Penyelesaian eksak dari masalah nilai awal (3.1) adalah: $y(x) = \tanh\left(\frac{1}{2}x^2\right)$.

Selanjutnya akan ditentukan penyelesaian masalah nilai awal (3.1) dengan menggunakan metode homotopi. Misalkan $y_0(x)$ pendekatan awal dari penyelesaian masalah nilai awal (3.1), dan parameter terkait q dengan $q \in [0,1]$. Operator linear $\mathfrak{L}$ yang dapat dipilih berbentuk:

$$\mathfrak{L}[\phi(x,q)] = \gamma_1(x)\frac{d\phi(x,q)}{dx} + \gamma_2(x)\phi(x,q)$$

dengan $\gamma_1(x) \ne 0$ dan $\gamma_2(x)$ suatu fungsi real. Berdasarkan persamaan (3.1), operator taklinear A berbentuk:

$$A[\phi(x,q)] = \frac{d\phi(x,q)}{dx} + x\phi^2(x,q) - x \tag{3.2}$$

Misalkan didefinisikan parameter bantu $h \ne 0$ dan fungsi bantu $B(x) \ne 0$, maka deformasi orde nol pada persamaan (2.5) memenuhi syarat awal $\phi(0,q)=0$, dan deformasi orde m pada persamaan (2.7) memenuhi syarat awal $y_m(0)=0$. Penyelesaian masalah nilai awal (3.1) dinyatakan oleh deret berikut:

$$y_0(x) + \sum_{m=1}^{\infty} y_m(x). \tag{3.3}$$

Misalkan penyelesaian dari masalah nilai awal (3.1) dengan metode homotopi ini menggunakan fungsi basis berupa fungsi polinomial (menggunakan fungsi lain juga diperkenankan). Misalkan himpunan basisnya adalah:

$$\left\{ x^{2(2m+1)} \mid m = 0,1,2,\cdots \right\}$$

sehingga penyelesaian $y(x)$ berbentuk:

$$y(x) = \sum_{m=0} a_m \; x^{2(2m+1)} \qquad (3.4)$$

Berdasarkan syarat awal $y_0(0) = 0$, maka dipilih $y_0(x) = x^2$ sebagai pendekatan awal dari penyelesaian masalah nilai awal (3.1). Misalkan pula operator linear $\mathfrak{L}$ yang dipilih berbentuk:

$$\mathfrak{L}[\phi(x,q)] = \frac{d\phi(x,q)}{dx}$$

maka penyelesaian persamaan (2.7) dengan syarat awal $y_m(0) = 0$ adalah

$$y_m(x) = \chi_m y_{m-1}(x) + h \int_0^x B(t)\; R_m[\vec{y}_{m-1}]dt. \qquad (3.5)$$

Bentuk $R_m[\vec{y}_{m-1}]$ diperoleh dari persamaan (2.8) dengan operator A pada persamaan (3.2) adalah:

$$R_m[\vec{y}_{m-1}] = \frac{dy_{m-1}(x)}{dx} + \sum_{j=0}^{m-1} x\Big(y_j(x) y_{m-1-j}(x) \Big) - x(1-\chi_m) \qquad (3.6)$$

Berdasarkan persamaan (3.4) dan (3.5), fungsi bantu *B(x)* yang dipilih berbentuk: $B(x) = 1.$

Dengan demikian dari persamaan (3.5) dan (3.6) diperoleh $y_m(x), m = 1,2,\cdots$ sebagai berikut:

$$y_1(x) = \frac{1}{2}hx^2 + \frac{1}{6}hx^6$$

$$y_2(x) = \frac{1}{2}h(1+h)x^2 + \frac{1}{6}h(1+2h)x^6 + \frac{1}{30}h^2x^{10}$$

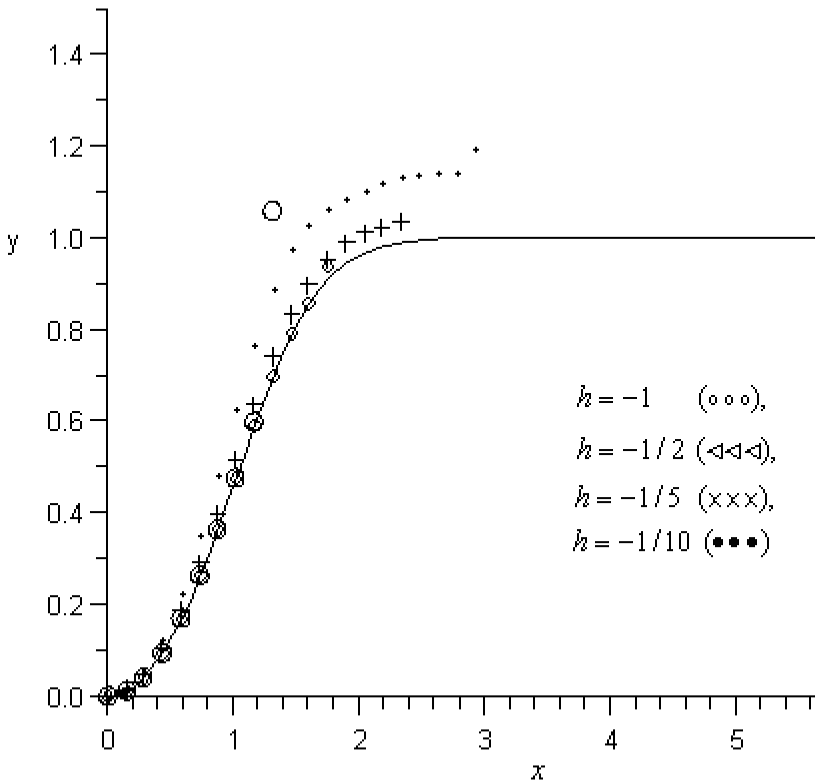
$$y_3(x) = \frac{1}{2}h(1+h)^2x^2 + \frac{2}{3}h(4+16h+23h^2)x^6 + $$

$$+ \frac{1}{60}h^2(4+7h)x^{10} + \frac{17}{2520}h^3x^{14}$$

$$\vdots$$

Bentuk $y_m(x), m = 1,2,\cdots$ dapat diperoleh dengan bantuan software *Maple*, *Mathematica* atau software matematika lainnya.

Jadi penyelesaian masalah nilai awal (3.1) dinyatakan dalam deret pada persamaan (3.3) dengan $y_m(x), m = 1,2,\cdots$ memenuhi persamaan (3.5). Gambar 1 menunjukkan perbandingan grafik antara penyelesaian eksak dan hampiran penyelesaian dari masalah nilai awal (3.1) dengan metode homotopi untuk nilai h = -1, h = -1/2, h = -1/5, dan h = -1/10 hingga orde 10. Berdasarkan Gambar 1 diperoleh bahwa hampiran penyelesaian dari masalah nilai awal (3.1) mendekati penyelesaian eksak dengan baik. Pada orde 10 hampiran penyelesaian mendekati dengan tepat pada selang nilai x yang cukup pendek pada nilai h = -1 dan h = -1/2.



Gambar 1. Perbandingan penyelesaian eksak dan hampiran dari masalah nilai awal (2.1) hingga orde 10 untuk nilai beberapa nilai h.

4. KESIMPULAN

Metode homotopi merupakan suatu pendekatan analitik untuk menyelesaikan suatu masalah taklinear. Dalam metode ini melibatkan suatu parameter dan suatu fungsi yang dapat dipilih sembarang. Pemilihan tertentu dari kedua besaran ini memberikan suatu pendekatan yang telah diketahui, seperti metode perturbasi dan metode dekomposisi adomian. Dengan kata lain, metode homotopi merupakan bentuk umum dari metode perturbasi dan metode dekomposisi adomian.

Efesiensi metode homotopi ditunjukkan dengan membandingkan dengan metode lain yang sudah ada. Hasil numerik menunjukkan bahwa metode homotopi dapat digunakan dan lebih baik untuk menyelesaikan suatu masalah taklinear.

DAFTAR PUSTAKA

[1] **Adomian, G.** 1988. A review of the decomposition method in applied mathematics. *J. Math. Anal. Appl*., **135**, 501-544.
[2] **He J.H.** 1998. Approximate analytical solution for seepage flow with fractional derivatives in porous media, *Comput. Method Appl. Mech. Eng*. **167**, 57-68.
[3] **Liao, S.,** 2004. *Beyond Perturbatio*, Chapman & Hall/CRC, Florida.
[4] **Nayfeh A.H.,** 2000. *Perturbation Methods*, Wiley, New York.
[5] **Ozis, T. A. Yildirim.** 2007. Travelling wave solution of Korteweg-de Vries equation using He`s homotopy perturbation method. *J. Nonlinear Sci. Numer. Simulation*, **8(2)**, 239-242.
[6] **Rafei, M. D.D. Ganji.** 2006. Explicit solutions of Helmholtz equation and fifth order KdV equation using homotopy perturbation method. *J. Nonlinear Sci. Numer. Simulation*, **7(3)**, 321-328.