HUBUNGAN DAERAH DEDEKIND DENGAN GELANGGANG HNP

TEDUH WULANDARI

Departemen Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam,
Institut Pertanian Bogor
Jl. Meranti, Kampus IPB Darmaga, Bogor 16680, Indonesia

Abstract. Tulisan ini memperlihatkan bahwa daerah Dedekind merupakan suatu gelanggang HNP.
Key words: Daerah Dedekind, Gelanggang HNP

1. Pendahuluan

Tulisan ini merupakan bagian dari rangkaian penelitian mengenai hubungan antara daerah ideal utama, daerah Dedekind dan gelanggang HNP. Pada [4] sudah diperlihatkan mengenai hubungan daerah ideal utama dan daerah Dedekind. Sedangkan pada [5] diperlihatkan bahwa tidak semua daerah Dedekind merupakan daerah ideal utama. Pada tulisan ini akan diperlihatkan bahwa daerah Dedekind merupakan suatu gelanggang HNP.

2. Definisi

Berikut diberikan definisi-definisi dasar yang digunakan dalam tulisan ini.

Definisi 1. *Misalkan R himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan dua operasi yaitu $+$ dan $\times$, dinotasikan $(R, +, \times)$, disebut gelanggang jika memenuhi*

1. *Terhadap operasi tambah $(R, +)$ membentuk grup komutatif.*
2. *Terhadap operasi kali $(R, \times)$ memenuhi sifat asosiatif: $(ab)c = a(bc)$ untuk semua unsur a, b, c di R; dan terdapat unsur kesatuan $1 \in R$ yang berbeda dari 0 dan bersifat $a1 = 1a = a$ untuk semua unsur $a \in R$.*
3. *Terhadap operasi tambah dan operasi kali secara bersama-sama $(R, +, \times)$ memenuhi sifat distributif: $a(b + c) = ab + ac$ dan $(a + b)c = ac + bc$ untuk semua unsur $a, b, c \in R$.*

Contoh dari gelanggang adalah $\mathbb{Z}$.

Definisi 2. *Daerah integral adalah gelanggang komutatif* $D = (D, +, \times)$ *yang tidak memuat pembagi nol, yaitu untuk unsur* a *dan* b *di* D *yang memenuhi* $ab = 0$ *berlaku* $a = 0$ *atau* $b = 0$.

Definisi 3. *Misalkan* $R = (R, +, \times)$ *suatu gelanggang. Subhimpunan tak hampa dari* R, $I \subseteq R$ *disebut ideal kiri (ideal kanan) jika*

1. *Terdapat operasi tambah* $(I, +)$ *membentuk subgrup dari* $(R, +)$
2. *Untuk setiap* $x \in I$ *dan* $r \in R$ *berlaku* $rx \in I(xr \in I)$

Subhimpunan I *disebut ideal jika* I *adalah ideal kiri dan ideal kanan.*

Definisi 4. *Suatu ideal* I *dari gelanggang komutatif* R *dikatakan maksimal jika*

1. $I \neq R$
2. *Jika* J *suatu ideal dari* R *yang memuat* I *dan berbeda dari* I, *maka* $J = R$

Pandang lapangan rasional $\mathbb{Q}$ dan bilangan $q \in \mathbb{Q}, q \neq 0$. Subhimpunan $I = rq|r \in \mathbb{Q}$ membentuk ideal di $\mathbb{Q}$. Berdasarkan aturan di atas I ideal maksimal.

Definisi 5. *Suatu ideal* I *dari gelanggang komutatif* R *dikatakan prim jika untuk unsur* a *dan* b *di* R *yang memenuhi* $ab \in I$ *berlaku* $a \in I$ *atau* $b \in I$.

Misalkan D daerah integral dan O menyatakan ideal nol. Ideal O merupakan ideal prim.

Definisi 6. *Misalkan* R *suatu gelanggang, modul kiri* M *atas gelanggang* R *adalah grup komutatif* $M = (M, +)$. *yang dilengkapi oleh tindakan* $R \times M \to M$ *melalui pengaitan* $(\alpha, x) \mapsto \alpha x$ *untuk semua pasang* $(\alpha, x) \in R \times M$, *dan untuk setiap* α, β *di* R *dan* x, y *di* M *berlaku*

1. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$
2. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$
3. $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$
4. $1x = x$

Modul kiri M *atas* R *dinotasikan* ${}_RM$. *Tindakan biasa juga disebut dengan operasi perkalian skalar. Submodul dari* R*-modul kiri* M *adalah subhimpunan dari* R*-modul kiri* M *yang membentuk modul terhadap operasi tambah dan operasi kali skalar yang berlaku di* M. *Untuk modul kanan, yang berbeda hanya tindakan dilakukan dari kanan. Modul yang merupakan modul kanan dan juga merupakan modul kiri cukup disebut dengan modul. Sedangkan modul yang memiliki basis disebut sebagai modul bebas.*

Berikut definisi mengenai modul Noether dan gelanggang Noether.

Definisi 7. *Misalkan* A *suatu gelanggang dan* M *suatu modul kiri atas* A. *Modul* M *disebut modul Noether jika memenuhi salah satu dari ketiga kondisi berikut ini*

1. *Setiap submodul dari M dibangun secara hingga,*
2. *Setiap rantai naik dari submodul M*

$$M_1 \subseteq M_2 \subseteq ... \subseteq M_k \subseteq ...$$

merupakan rantai naik stabil, artinya terdapat bilangan asli N sehingga $M_n = M_k$ untuk setiap bilangan asli $k \leq n$

3. *Setiap himpunan tak nol dari submodul-submodul M selalu memiliki unsur maksimal.*

Definisi 8. *Suatu gelanggang R dikatakan gelanggang Noether kiri (kanan) jika R sebagai modul kiri (kanan) atas dirinya sendiri adalah modul Noether. Jika R merupakan gelanggang Noether krir dan juga merupakan gelanggang Noether kanan, maka R dikatakan gelanggang Noether.*

Definisi 9. *Misalkan R dan S gelanggang komutatif dengan R subgelanggang dari S. Unsur s di S dikatakan integral atas R jika ada suku banyak monik $f(x)$ di $R[x]$ sehingga $f(s) = 0$.*

Pengertian integral diatas diperluas untuk setiap unsur s di S. Gelanggang R dikatakan tertutup secara integral di S jika untuk setiap unsur s di S yang integral atas R berlaku s di R.

3. Hubungan daerah Dedekind dengan gelanggang HNP

Dari [4] dikenal definisi mengenai daerah Dedekind yaitu suatu daerah integral R dengan lapangan hasil bagi $Q(R)$ yang memenuhi

1. R gelanggang Noether
2. R tertutup secara integral di $Q(R)$
3. setiap ideal prim tak nol di R adalah ideal maksimal

Suatu gelanggang R dikatakan *gelanggang prim* jika untuk setiap unsur tak nol a, b di R berlaku $aRb \neq 0$, dengan kata lain ada $r \in R$ sedemikian sehingga $arb \neq 0$. Salah satu contoh gelanggang prim adalah gelanggang matriks berukuran 2×2 atas bilangan bulat.

Misalkan R suatu gelanggang, modul V_R dikatakan *modul herediter* jika V_R dan setiap submodulnya modul projektif. Dan R dikatakan *gelanggang herediter kanan* jika setiap ideal kanan dari R merupakan modul projektif atas R, dengan kata lain modul R_R merupakan herediter. Jika R merupakan gelanggang herediter kanan dan gelanggang herediter kiri maka R dikatakan herediter. Pendefinisian dari gelanggang herediter dibahas secara lengkap pada [6].

Misalkan R merupakan suatu gelanggang, R dikatakan *gelanggang HNP* jika R memenuhi

1. R gelanggang herediter
2. R gelanggang Noether
3. R gelanggang prim

Misalkan R merupakan daerah Dedekind. Perhatikan bahwa baik daerah Dedekind maupun gelanggang HNP sama-sama harus memenuhi gelanggang Noether maka syarat 1 definisi gelanggang HNP terpenuhi.

Dan karena daerah Dedekind merupakan suatu daerah integral maka R tidak memuat pembagi nol, artinya untuk setiap $a, b \in R$, $a \neq 0, b \neq 0$ maka $ab \neq 0$ sehingga untuk sebarang $x, y \in R$ dengan $x \neq 0, y \neq 0$ ada $r \in R$ dengan $r \neq 0$ sehingga $(xr)\, y \neq 0$ karena $x \neq 0, r \neq 0$ maka $xr \neq 0$ akibatnya karena $y \neq 0$ maka $(xr)\, y \neq 0$, berdasarkan definisi gelanggang prim R merupakan gelanggang prim.

Sehingga untuk menunjukkan R merupakan gelanggang HNP cukup dengan menunjukkan daerah Dedekind merupakan gelanggang herediter. Artinya cukup menunjukkan setiap ideal di daerah Dedekind merupakan modul projektif.

Sebelum menunjukkan suatu daerah Dedekind merupakan suatu gelanggang herediter, akan dibahas terlebih dahulu mengenai ideal invertibel. Misalkan R suatu daerah integral dengan lapangan hasil bagi $Q(R)$ dan A merupakan ideal dari R. Definisikan $A^{-1} = \{q \in Q(R) ; Aq \subseteq R\}$, maka

(a) A^{-1} merupakan suatu $R-$submodul dari $Q(R)$ dengan $A^{-1} \supseteq R$
(b) $A^{-1}A = \{\sum_{i=1}^{n} q_i a_i \in R; q_i \in A^{-1}, a_i \in A\}$ ideal dari R dengan $A \subseteq A^{-1}A$.

Akan diperlihatkan bukti dari pernyataan di atas.

(a) Karena $R \subseteq Q(R)$ dan A ideal dari R maka $A = AR \subseteq R$ sehingga $R \subseteq A^{-1}$ sehingga $A^{-1} \neq 0$. Misalkan $a, b \in A^{-1}$ dan $r \in R$, karena $Aa \subseteq R$ dan $Ab \subseteq R$ maka

$$A(a+b) \subseteq Aa + Ab \subseteq R + R = R$$

sehingga $A(a+b) \subseteq R$, dan

$$A(ar) \subseteq Rr \subseteq R$$

sehingga $rA(a) \subseteq R$, akibatnya $(a+b), ar \in A^{-1}$. Jadi A^{-1} submodul dari $Q(R)$.

(b) Berdasarkan definisi A^{-1} diperoleh $AA^{-1} \subseteq R$. Karena A ideal dan $R \subseteq A^{-1}$ maka $RA \subseteq A^{-1}A$ akibatnya $A^{-1}A \neq 0$. Misalkan $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i a_i, \sum_{j=1}^{n} \beta_j b_j \in A^{-1}A$ dan $r \in R$ maka

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i a_i + \sum_{j=1}^{n} \beta_j b_j = \sum_{i=1}^{m+n} \alpha_i a_i \ \in A^{-1}A \text{ dengan } \alpha_{m+j} = \beta_j \text{ dan } a_{m+j} = b_j$$

dan

$$r\left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i a_i\right) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i (r a_i) \in A^{-1}A \text{ dengan } r a_i \in A \text{ dan } \alpha_i \in A^{-1}$$

Jadi $A^{-1}A$ ideal di R

Secara khusus ideal tak nol A dikatakan *ideal invertibel* jika $A^{-1}A = R$. Akan ditunjukkan bahwa A^{-1} yang memenuhi ideal invertibel bersifat tunggal. Misalkan ada B $R-$submodul dari $Q(R)$ yang memenuhi

$BA = R$. Akan ditunjukkan bahwa $B = A^{-1}$. Karena $BA = R$ dan berdasarkan definisi A^{-1} maka $B \subseteq A^{-1}$, dan

$$A^{-1} = RA^{-1} = BAA^{-1} \subseteq BR = B$$

sehingga diperoleh $A^{-1} \subseteq B$. Jadi $B = A^{-1}$.

Contoh 10. *$\mathbb{Z}8$ merupakan suatu ideal invertibel. Berdasarkan definisi dapat diperoleh $(\mathbb{Z}8)^{-1} = \{\alpha \in \mathbb{Q}; \alpha\mathbb{Z}8 \subseteq \mathbb{Z}\}$, karena $\frac{1}{8}\mathbb{Z}8 \subseteq \mathbb{Z}$ maka $\frac{1}{8} \in (\mathbb{Z}8)^{-1}$, sehingga $1 = \frac{1}{8}.8 \in (\mathbb{Z}8)^{-1}(\mathbb{Z}8)$, akibatnya $\mathbb{Z} = (\mathbb{Z}8)^{-1}(\mathbb{Z}8)$. Jadi $\mathbb{Z}8$ ideal invertibel.*

Hubungan antara ideal invertibel dan modul projektif diperlihatkan pada teorema berikut ini

Teorema 11. *Misalkan R daerah integral dengan lapangan hasil bagi $Q(R)$ dan A suatu ideal tak nol dari R. Jika A ideal invertibel dari R maka A modul projektif atas R.*

Bukti : Misalkan A ideal invertibel maka $A^{-1}A = R$ sehingga $1 = \sum_{i=1}^{n} a_i q_i$ dengan $a_i \in A$ dan $q_i \in A^{-1}$ untuk setiap i. Misalkan V modul bebas atas R dengan basis $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Definisikan

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & V & \to & A \\ & v_i & \mapsto & a_i \end{array}$$

jelas φ merupakan suatu homomorfisma modul. Definisikan

$$\begin{array}{rccl} \theta : & A & \to & V \\ & a & \mapsto & \sum_{i=1}^{n} v_i(aq_i) \end{array}$$

Akan ditunjukkan bahwa θ suatu homomorfisma modul, misalkan $a, b \in A$, dan $r \in R$ sehingga

$$\begin{aligned} \theta(a+b) &= \sum_{i=1}^{n} v_i (a+b) q_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} v_i (aq_i + bq_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} v_i a q_i + \sum_{i=1}^{n} v_i v q_i \\ &= \theta(a) + \theta(b) \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} \theta(ar) &= \sum_{i=1}^{n} v_i (ar) q_i \\ &= r \sum_{i=1}^{n} v_i a q_i \\ &= r\theta(a) \end{aligned}$$

jadi θ homomorfisma modul. Perhatikan yang berikut ini

$$\begin{aligned}(\varphi\circ\theta)(a) &= \varphi(\theta(a))\\ &= \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} v_i a q_i\right)\\ &= a\varphi\left(\sum_{i=1}^{n} v_i q_i\right)\\ &= a\sum_{i=1}^{n}\varphi(v_i)\,q_i\\ &= a\sum_{i=1}^{n} a_i q_i = a.1 = a\end{aligned}$$

jadi $\varphi\circ\theta = 1_A$. Selanjutnya akan ditujukkan bahwa A isomorfisma dengan suku langsung dari V. Misalkan $v \in V$ sehingga $\theta(\varphi(v)) \in \Im(\theta) \subseteq V$, pandang unsur $v - \theta(\varphi(v)) \in V$

$$\begin{aligned}\varphi(v-\theta(\varphi(v))) &= \varphi(v) - \varphi(\theta(\varphi(v)))\\ &= \varphi(v) - (\varphi\circ\theta)(\varphi(v))\\ &= \varphi(v) - \varphi(v) = 0\end{aligned}$$

sehingga $v - \theta(\varphi(v)) \in \ker(\varphi) \subseteq V$. Misalkan $c = v - \theta(\varphi(v)) \in \ker(\varphi)$ maka $v = c + \theta(\varphi(v))$ akibatnya $V = \ker(\varphi) + \Im(\theta)$. Misalkan $x \in \ker(\varphi) \cap \Im(\theta)$, maka $\varphi(x) = 0$ dan ada $y \in A$ sedemikian sehingga $\theta(y) = x$, akibatnya

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= 0\\ \varphi(\theta(y)) &= 0\\ y &= 0\end{aligned}$$

karena $y = 0$ maka $\theta(y) = \theta(0) = 0 = x$, jadi $\ker(\varphi) \cap \Im(\theta) = 0$ sehingga $V = \ker(\varphi) \oplus \Im(\theta)$. Terakhir akan ditunjukkan bahwa A isomorfis dengan $\Im(\theta)$. Perhatikan pembatasan homomorfisma θ berikut

$$\begin{array}{llll}\theta: & A & \to & \Im(\theta)\\ & a & \mapsto & \sum_{i=1}^{n} v_i(aq_i)\end{array}$$

jelas θ pemetaan yang bersifat pada, akan ditunjukkan θ bersifat satu-satu, misalkan $x \in \ker(\theta)$ sehingga $\theta(x) = 0$

$$\begin{aligned}x &= 1_A(x) = \varphi(\theta(x))\\ &= \varphi(0) = 0\end{aligned}$$

akibatnya $\ker(\theta) = 0$, jadi θ bersifat satu-satu sehingga A isomorfisma dengan $\Im(\theta)$. Karena A isomorfisma dengan suku langsung dari V dan V merupakan modul bebas, maka dapat disimpulkan bahwa A merupakan modul projektif. ■

Berdasarkan teorema di atas dapat diperoleh akibat berikut ini

Lema 12. *Misalkan R suatu gelanggang. Jika setiap ideal dari R merupakan ideal invertibel maka R merupakan suatu gelanggang herediter.*

Bukti : Karena setiap ideal dari R merupakan ideal invertibel dan setiap ideal invertibel adalah modul projektif atas R, maka setiap ideal di R merupakan modul projektif atas R akibatnya R merupakan gelanggang herediter. ■

Berdasarkan Akibat 12 maka untuk menunjukkan suatu daerah Dedekind adalah gelanggang herediter cukup dengan menunjukkan bahwa setiap ideal di daerah Dedekind tersebut merupakan ideal invertibel. Sebelum itu perhatikan yang berikut ini.

Lema 13. *Misalkan R gelanggang komutatif dan P suatu ideal dari R yang tidak sama dengan R. Jika tidak ada ideal $A \supsetneq P$ dan $B \supsetneqq P$ sehingga $AB \subseteq P$ maka P ideal prim.*

Bukti : Misalkan $a, b \in R$ dengan $ab \in P$. Akan ditunjukkan $a \in P$ atau $b \in P$. Andaikan $a, b \notin P$. Misalkan $A = P + Ra$ dan $B = P + Rb$ ideal dari R dengan $A \supsetneqq P$ dan $B \supsetneq P$. Ambil $\sum_{i=1}^{n} (p_i + r_i a)(p_i' + r_i' b) \in AB$, untuk setiap $i = 1, 2, \ldots, n$ berlaku $p_i p_i' + p_i r_i' b + r_i a p_i' + r_i a r_i' b \in P$, karena P ideal dan $ab \in P$. Akibatnya $\sum_{i=1}^{n} (p_i + r_i a)(p_i' + r_i' b) \in P$ sehingga $AB \subseteq P$ kontradiksi dengan tidak ada ideal $\supsetneq P$ dan $B \supsetneqq P$ sehingga $AB \subseteq P$. Jadi haruslah $a \in P$ atau $b \in P$, akibatnya P ideal prim. ■

Dengan bantuan Sifat 13 dapat diperoleh teorema berikut ini.

Teorema 14. *Misalkan R gelanggang yang komutatif. Jika R Noether dan I ideal dari R yang tidak sama dengan R maka ada ideal prim $P_1, P_2, \ldots, P_n$ yang memuat I sehingga $P_1 P_2 \ldots P_n \subseteq I$*

Bukti : Misalkan R Noether. Jika I ideal prim maka teorema terbukti. Jika I ideal yang bukan prim. Andaikan tidak ada ideal prim $P_1, P_2, \ldots, P_n$ dari R yang memuat I sehingga $P_1 P_2 \ldots P_n \subseteq I$. Perhatikan koleksi ideal dari R memenuhi kondisi di atas berikut ini
$\mathcal{K} = \{J \rhd R \mid \nexists J_1, J_2, \ldots J_n \unrhd R$ sedemikian sehingga $J_i \supseteq J$ dan
$J_1 J_2 \ldots J_n \subseteq J\}$
Jelas $\mathcal{K} \neq 0$ karena $I \in \mathcal{K}$. Karena R Noether maka $\mathcal{K}$ memiliki unsur maksimal, misalkan J_0, karena $J_0 \in \mathcal{K}$ maka jelas J_0 tidak prim dan $J_0 \neq R$ akibatnya berdasarkan sifat 13 ada ideal $A \supseteq J_0$ dan $B \supseteq J_0$ sedemikian sehingga $AB \subseteq J_0$. Karena J_0 unsur maksimal maka $A, B \notin \mathcal{K}$, akibatnya ada $A_1, A_2, \ldots, A_s, B_1, B_2, \ldots, B_t$ ideal prim di R dengan $A_i \supseteq A$ dan $B_j \supseteq B$ sehingga $A_1 A_2 \ldots A_s \subseteq A$ dan $B_1 B_2 \ldots B_t \subseteq B$. Akibatnya

$$A_1 A_2 \ldots A_s B_1 B_2 \ldots B_t \subseteq AB \subseteq J_0$$

sehingga $J_0 \notin \mathcal{K}$ kontradiksi dengan $J_0 \in \mathcal{K}$. Jadi ada ideal prim $P_1, P_2, \ldots, P_n$ dari R yang memuat I sehingga $P_1 P_2 \ldots P_n \subseteq I$. ■

Berikut akan ditunjukkan bahwa suatu daerah Dedekind adalah suatu gelanggang herediter. Misalkan R daerah Dedekind, untuk menunjukkan R adalah gelanggang herediter perhatikan langkah-langkah berikut ini

Langkah 1. Akan ditunjukkan, jika $P \neq 0$ ideal prim dari R maka $P^{-1} \supset R$. Dari sifat ideal invertibel diketahui bahwa $P^{-1} \supseteq R$. Karena $P \neq 0$ maka ada $a \neq 0 \in P$ sehingga dapat dibentuk Ra ideal dari R. Karena R Noether dan $Ra \neq R$ maka berdasarkan Teorema 14 terdapat ideal prim $P_1, P_2, \ldots, P_n$ dari R yang memuat Ra sehingga $P_1 P_2 \ldots P_n \subseteq Ra$ dan asumsikan n merupakan bilangan asli minimal yang memenuhi terorema tersebut. Karena $P_1 P_2 \ldots P_n \subseteq Ra \subseteq P$ dan P prim maka ada $P_i \subseteq P$ untuk suatu i, $1 \leq i \leq n$. Karena P_i ideal prim tak nol dan R daerah Dedekind maka P_i ideal maksimal, akibatnya $P_i = P$. Karena n merupakan bilangan asli minimal yang memenuhi, maka $P_1 P_2 \ldots P_{i-1} P_{i+1} \ldots P_n \nsubseteq Ra$, akibatnya ada $b \in P_1 P_2 \ldots \widehat{P_i} \ldots P_n$ dengan $b \notin Ra$. Dengan demikian $\dfrac{b}{a} \notin R$. Karena $P_i = P$ maka $bP \subseteq P_1 P_2 \ldots P_i \ldots P_n \subseteq Ra$ sehingga $\dfrac{b}{a} P \subseteq R$ akibatnya $\dfrac{b}{a} \in P^{-1}$. Karena $\dfrac{b}{a} \notin R$ tetapi $\dfrac{b}{a} \in P^{-1}$ maka $\frac{b}{a} \in P^{-1} \backslash R$. Jadi $P^{-1} \supset R$.

Langkah 2. Akan ditunjukkan, jika P ideal prim tak nol dari R maka P ideal invertibel. Andaikan P bukan ideal invertibel maka $P \subseteq PP^{-1} \subsetneq R$. Karena R daerah Dedekind dan P ideal prim tak nol maka P ideal maksimal sehingga $P = PP^{-1}$. Berdasarkan langkah sebelumnya, $P^{-1} \supset R$ sehingga ada $\alpha \in P^{-1} \backslash R$. Karena $P \neq 0$ maka ada $a \in P$ dengan $a \neq 0$. Pandang $\alpha^{-1} a \in \left(P^{-1}\right)^i P = P$ untuk setiap bilangan bulat $i \geq 0$. Untuk setiap bilangan bulat $k \geq 0$, definisikan $J_k = \sum_{i=0}^{k} R\alpha^i a$, jelas J_k merupakan ideal dari R. Perhatikan $J_0 \subseteq J_1 \subseteq J_2 \subseteq \ldots$, karena R Noether maka ada bilangan asli n sedemikian sehingga $J_n = J_k$ untuk setiap bilangan bulat $k \geq n$ sehingga $\alpha^{n+1} a \in J_{n+1}$ juga merupakan anggota dari J_n akibatnya ada $r_0, r_1, \ldots, r_n \in R$ sedemikian sehingga

$$\begin{aligned} r_{n+1}\alpha^{n+1} a &= r_0 a + r_1 \alpha a + \ldots + r_n \alpha^n a \\ 0 &= -r_0 a - r_1 \alpha a - \ldots - r_n \alpha^n a + r_{n+1}\alpha^{n+1} a \qquad \text{karena } a \neq 0 \\ 0 &= -r_0 - r_1 \alpha - \ldots - r_n \alpha^n + r_{n+1}\alpha^{n+1} \end{aligned}$$

akibatnya ada suku banyak monik $f(x) = -r_0 - r_1 x - \ldots - r_n x^n + r_{n+1} x^{n+1}$ di $R[x]$ sedemikian sehingga $f(\alpha) = 0$ artinya $\alpha \notin R$ integral atas R. Kontradiksi dengan R tertutup secara integral di $Q(R)$. Jadi P ideal invertibel.

Langkah 3. Akan ditunjukkan, jika $I \neq 0$ ideal dari R maka I ideal invertibel. Untuk I ideal prim sudah dibuktikan di Langkah 2. Jika $I = R$ maka $RR = R$ akibatnya $I = R$ ideal invertibel. Jadi cukup dibuktikan untuk I ideal yang bukan prim dan tidak sama dengan R. Andaikan I bukan ideal invertibel maka $II^{-1} \subsetneqq R$. Perhatikan koleksi ideal-ideal yang bersifat seperti I berikut $\mathcal{C} = \{A \mid A \subsetneqq R$ ideal dari R dengan $AA^{-1} \subsetneqq R\}$, jelas $\mathcal{C} \neq 0$ karena $I \in \mathcal{C}$. Karena R Noether maka ada unsur maksimal di $\mathcal{C}$, misalkan T, karena $T \in \mathcal{C}$ maka T tidak prim dan $T \subsetneqq R$, berdasarkan Sifat 13 ada ideal X dan Y dari R dengan $X \supsetneqq T$ dan $Y \supsetneqq T$ sedemikian sehingga $XY \subseteq T$. Karena T unsur maksimal di $\mathcal{C}$ maka $X, Y \notin \mathcal{C}$ akibatnya X, Y ideal invertibel sehingga

$$T \subsetneqq X = RX = Y^{-1}YX \subseteq Y^{-1}T \subseteq R$$

karena $Y^{-1}T \subseteq R$ maka $Y^{-1}T \notin \mathcal{C}$ sehingga $T \subsetneqq Y^{-1}T$ ideal invertibel dari R. Akibatnya ada K $R-$ submodul di $Q(R)$ sehingga $KY^{-1}T = R$ akibatnya $KY^{-1} = T^{-1}$ dengan $TT^{-1} = R$. Kontradiksi dengan $T \in \mathcal{C}$ sehingga $TT^{-1} \subsetneqq R$. Jadi haruslah I ideal invertibel.

Berdasarkan ketiga langkah di atas dapat disimpulkan setiap ideal di R merupakan ideal invertibel maka berdasarkan Akibat 12 dapat diperoleh bahwa R merupakan gelanggang herediter. Jadi kesimpulan setiap daerah Dedekind merupakan gelanggang herediter.

Karena daerah Dedekind R merupakan gelanggang Noether, gelanggang Prim dan gelanggang herediter maka R juga merupakan gelanggang HNP. Jadi dapat disimpulkan suatu daerah Dedekind juga merupakan gelanggang HNP.

Daftar Pustaka

1. Adkins, William A & Weintraub Steveh H, Algebra An Aprroach via Module Theory, Springer-Verlag, New York, 1992
2. Lang, Serge, Algebra, Third Edition, Addison Wesley, New York, 1991.
3. Passman, Donald S, A Course in Ring Theory, Wadsworth& Brooks, California, 1991.
4. Wulandari, Teduh, Hubungan daerah ideal utama dan daerah Dedekind, disampaikan pada kegiatan *Conference on Statistical and Mathematical Sciences of Islamic Society in South East Asia Region* pada tanggal 25-26 April 2003.
5. Wulandari, Teduh, Contoh Daerah Dedekind, disampaikan pada kegiatan sesi poster Departemen Matematika, IPB pada tanggal 15 September 2004.
6. Wulandari, Teduh, Gelanggang Herediter, *Jurnal Matematika dan Aplikasinya*, vol 3, No.2, Desember, 2004.