MASALAH SYARAT BATAS BEBAS PERSAMAAN DIFERENSIAL PARSIAL PARABOLIK SATU-DIMENSI

AGAH D. GARNADI

Departemen Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam,
Institut Pertanian Bogor
Jl. Raya Pajajaran, Kampus IPB Baranang Siang, Bogor, Indonesia

Abstract. Sering ditemui dalam proses difusi diperlukan penentuan satu permukaan bebas dari data di batas yang berlebih. Satu teknik penyelesaian konstruktif yang umum digunakan ialah metode garis. Tulisan ini memberikan langkah yang diambil untuk mendekati berbagai masalah syarat batas bebas yang eksplisit maupun implisit untuk persamaan difusi satu-dimensi dengan mempergunakan satu barisan masalah syarat batas dari satu persamaan diferensial biasa. Diperlihatkan bahwa persamaan ini memiliki solusi yang dapat diperoleh dengan mempergunakan teknik *invariant imbedding*. Juga diperlihatkan untuk satu model bahwa solusi hampiran akan konvergen ke solusi klasik yang (hampir) tunggal saat parameter diskretisasi menuju nol.

1. Pendahuluan.

Di antara sejumlah masalah syarat batas bebas untuk persamaan diferensial parsial, masalah parabolik satu dimensi boleh dikata telah dibahas sangat rinci. Satu masalah jenis tersebut yang cukup dimengerti dengan baik ialah masalah pelelehan batang es yang bersentuhan dengan bahan cair. Jika dianggap bahwa es selalu dalam keadaan suhunya terjaga pada suhu tetap $0°C$, dan perpindahan panas dianggap hanya melalui konduksi, maka distribusi suhu di batang es dapat diterangkan dengan persamaan panas berikut:

$$u_{xx} - c\, u_t = 0, \tag{1.1}$$

DIBIAYAI OLEH PROYEK PENINGKATAN IPB, KONTRAK NO XX/KXX.XX.X/SPHP/2004

dengan syarat batas dan syarat awal:

$$\begin{aligned} u(0,t) &= \alpha(t), && (1.2)\\ u(s(t),t) &= 0, && (1.3)\\ u_x(s(t),t) &= -\lambda\frac{ds}{dt}, && (1.4)\\ s(0) &= 0. && (1.5) \end{aligned}$$

Dengan notasi sebagai berikut, u menyatakan suhu dalam fluida di antara dinding $x = 0$ yang bersuhu $\alpha(t)$ dan batas $s(t)$ yang tidak diketahui dan bergerak sebagai batas antara fluida dan es. Syarat untuk *flux* $u_x(s(t), t)$ di atas, diperoleh dari neraca energi dan memiliki arti bahwa panas mengalir ke es digunakan untuk melelehkannya alih-alih untuk menaikkan suhu. Syarat $s(0) = 0$ berarti tidak ada fluida pada awalnya. Konstanta c dan λ ditentukan dari konduktivitas, kapasitas panas dan panas laten dari air.

Masalah tersebut di atas dan perluasannya ke sistem dua fasa (dengan anggapan bahwa benda padatnya juga memiliki perubahan suhu) sudah dipelajari di akhir abad ke-19 oleh J. Stefan, sehingga kini dikenal sebagai *masalah Stefan*. Seiring dengan berjalannya waktu, muncul berbagai masalah teknik akibat perkembangan teknologi yang dapat dirumuskan sebagai masalah berjenis Stefan, akibatnya karya ilmiah yang membahas solusi masalah syarat batas bebas secara analitik mau pun numerik meningkat cukup berarti. Pembahasan mengenai perumusan masalah syarat batas bebas satu dimensi berkait dengan perubahan fasa, filtrasi, aliran viskoplastis dan proses tumbukan serta bahasan matematika yang rinci dari masalah yang muncul dari sejumlah model tertentu dapat ditemukan di monograf [32], yang mencatat perkembangan hingga dasa warsa 60'an, dan prosiding [26], serta seri yang mencantumkan judul *Free and Moving Boundary Problem* semisal [6], serta munculnya Jurnal *Interface and Moving Boundary Problems* yang berumur lebih dari sepuluh tahun, menandakan pentingnya model yang menyangkut batas bebas. Sementara itu,yang menurut hemat penulis, perlu diperhatikan mengingat bidang aplikasinya cukup dekat dengan masalah di Indonesia, berbagai masalah batas bebas bermunculan dari masalah matematika keuangan [39] [22],[23], dari teknologi pangan misalnya mengenai penggorengan dan pengeringan [9] dan pengeringan beku [10],[11], [24], [27],[2], [3]; teknologi penerbangan [12],[25]; serta pengeboran dengan laser dalam industri manufaktur [1], pembedahan dengan sinar laser [13], [28], pembedahan kulit sel telur dengan sinar laser [14].

Satu teknik yang dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah syarat batas persamaan difusi satu dimensi dikenal dengan metode garis lateral. Pada prinsipnya, metode ini ialah mengganti persamaan diferensial parsial dengan satu barisan masalah syarat batas persamaan diferensial biasa. Secara historis, Rothe [30] mempergunakan strategi tersebut untuk masalah syarat batas parabolik dua dimensi di daerah yang tetap, sehingga *metode garis lateral* sering pula dikenal sebagai *Metode Rothe.* Strategi ini tidak hanya digunakan sebagai metode numerik[1], [5], juga digunakan untuk pembahasan analitik [16]. Bahkan, meski tidak dikutip oleh [32], metode ini sering digunakan untuk menyelesaikan masalah syarat batas bebas dan masalah *interface* (misalnya, [4], [17], [34], [35], [37], [38] serta rujukan yang dikutipnya). Semua karya tersebut cukup berbeda substansinya karena ragam masalah yang diselesaikannya, tetapi semua memiliki benang merah yang sama dan mempergunakan teknik matematika yang sama.[2] Tulisan ini bertujuan memperlihatkan tahapan penting penggunaan *Metode Rothe* untuk menyelesaikan masalah syarat batas bebas. Dapat diidentifikasi bahwa dalam proses penyelesaian terdapat 5 tahapan penting,

(1) Perumusan dengan mempergunakan aproksimasi garis
(2) Penyelesaian rangkaian persamaan garis
(3) Penurunan batas a-priori dari penyelesaian persamaan garis
(4) Pendefinisian penyelesaian dari masalah syarat batas bebas yang diberikan
(5) Kekonvergenan penyelesaian metode garis.

Tahap 1 dan 2 bersifat algoritmik dan akan dirumuskan untuk masalah yang cukup umum. Hal penting ialah, tahap batas a-priori dan kekonvergenan solusi sangat tergantung pada data yang diberikan, karenanya hanya akan dibatasi pada satu masalah model. Cukup penting untuk dicatat, karya [19] cukup berbeda dibanding dengan karya lainnya dalam 2 hal. Tahap 2 digunakan teknik *invariant imbedding*, yang mengubah masalah syarat batas persamaan garis menjadi masalah syarat awal, dan langkah ke 5 yang mempergunakan konsep solusi lemah alih-alih solusi klasik. Meski demikian, benang merah metodenya tetap tampak jelas serupa.

[1]Kelompok penelitian di *Konrad Zusse Institut Berlin* cukup extensif mempergunakan Metode Rothe, lihat kumpulan Technical Reports yang disediakan di homepagenya: `http:www.zib.de`.

[2]Penggunaan Metode *Rothe* tidak dibatasi untuk masalah parabolik, tetapi juga untuk persamaan eliptik, [21] memanfaatkannya untuk menyelesaikan *Dam Problem* yang merupakan masalah batas bebas persamaan Eliptik.

2. Aproksimasi garis lateral dan *invariant imbedding*.

Tinjau permasalahan berikut

$$\begin{aligned} L\,u \;:=\; (\frac{\partial}{\partial x}(k(x,t)\frac{\partial}{\partial x}) \;&+\; a(x,t)\frac{\partial}{\partial x} + b(x,t) && (2.1)\\ & -c(x,t)\frac{\partial}{\partial t}\,u \;=f(x,t), && (2.2)\\ & t>0, \quad 0<x<s(t), \\ \alpha_1(t)u(0,t)+\alpha_2(t)u_x(0,t) \;&=\; \alpha(t), && (2.3)\\ & \alpha_1(t)^2+\alpha_2(t)^2 \neq 0,\; t>0, \\ u(x,0) \;&=\; u_0(x), \quad 0<x<s(t), && (2.4) \end{aligned}$$

dengan kendala,

$$H(u(s,t),u_x(s,t),u_t(s,t),s(t),s'(t),t)=0, \qquad t>0, \tag{2.5}$$

dengan $H=(H_1,H_2)$ fungsi bernilai di R^2 yang diberikan. Dalam pembahasan selanjutnya, semua data berupa fungsi dianggap memenuhi syarat cukup licin *(smooth)* yang diperlukan untuk operasi di daerah $\Omega_\infty = \{(x,t); 0 \le x < \infty, 0 \le t \le T\}$, dengan T sebarang tetapi merupakan batas atas yang tetap.

Perumusan di atas termasuk beragam masalah syarat batas bebas, antara lain:

(i.) Masalah Stefan

$$H = \begin{pmatrix} u \\ u_x + \lambda s' \end{pmatrix}, \tag{2.6}$$

atau secara umum

$$H = \begin{pmatrix} u + \mu_1(s,t) \\ u_x + \lambda s' + \mu_2(s,t) \end{pmatrix}, \qquad \lambda > 0. \tag{2.7}$$

(ii.) Masalah teori optimal stopping [35] dan aliran plastis Bingham [32]

$$H = \begin{pmatrix} u \\ u_x \end{pmatrix}. \tag{2.8}$$

(iii.) Masalah filtrasi satu fasa[34],[38]:

$$H = \begin{pmatrix} u - \mu_1(s,t) \\ u_x - \mu_2(s,t) \end{pmatrix}. \tag{2.9}$$

(iv.) Model Gibbs-Thompson untuk pertumbuhan gelembung tunggal dalam larutan kimia [7]:

$$H = \begin{pmatrix} u + \mu_1 e^{\mu_2/s} \\ u_x - (\mu_3 - u)s' \end{pmatrix}. \tag{2.10}$$

(v.) Radiasi dan ablasi di permukaan bebas

$$H = \begin{pmatrix} u - \mu_1(u^4 - \mu_1^4) \\ s' - \mu_3 e^{\mu_4/(\mu_5 - u)} \end{pmatrix}. \tag{2.11}$$

Dengan semua μ_i bergantung pada s dan t. Lebih jauh, hubungan fungsional di syarat batas bebas dapat diakomodir. (Lihat, misalnya, perumusan tumbukan viskoplastis [32], masalah perpindahan panas untuk pelapisan unggun mengalir [20], lihat juga proposal software di [36]).

Semua masalah di atas memiliki kesamaan yaitu berupa persamaan difusi, apakah berbentuk kartesian, radial, mau pun bola, dengan atau tanpa suku konveksi, dan dengan suku beban yang tergantung pada masalahnya, harus diselesaikan dengan syarat memenuhi hubungan affin (2.3) dan kedua hubungan (2.5). Jika $s(t)$ diberikan, masalah menjadi over-determined sehingga mungkin tak ada solusi. Akan tetapi, jika $s(t)$ tidak diketahui secara *a-priori* dan harus ditentukan sehingga data di batas yang diberikan menjadi konsisten. Jika salah satu persamaan di (2.5) dapat diselesaikan untuk $s(t)$ atau $s'(t)$, maka masalah dikenal sebagai masalah syarat batas bebas *eksplisit*; lainnya disebut *implisit.* Masalah Stefan merupakan masalah eksplisit, sedangkan masalah optimal stopping merupakan perumusan implisit.

2.1. **Metode garis lateral (Metode Rothe).** Penggunaan metode garis lateral atau Metode Rothe dengan mudah diaplikasikan ke masalah di atas tanpa melakukan tambahan apa pun atas struktur persamaannya. Untuk itu, kita definisikan partisi $\{0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = T\}$ dari selang $[0, T]$, yang untuk kemudahan kita anggap terdiri dari subselang yang seragam: $\Delta t = t_i - t_{i-1}, i = 1, 2, \cdots, N$. Hal yang paling sederhana dan umum digunakannya metode Rothe untuk menghampiri (2.2) dengan melakukan substitusi berikut ini:

$$u_t(x, t_n) \approx \frac{u(x, t_n) - u(x, t_{n-1})}{\Delta t}, \qquad s'(t_n) \approx \frac{s(t_n) - s(t_{n-1})}{\Delta t}),$$

yang akhirnya mereduksi persamaan diferensial parsial (2.2) menjadi satu barisan masalah syarat batas bebas untuk persamaan diferensial biasa berikut ini:

$$\begin{aligned} (k(x,t_n)u_n')' + a(x,t_n)u_n' + b(x,t_n) - c(x,t_n)\frac{u_n - u_{n-1}}{\Delta t} & \\ = f(x,t_n), & \\ n = 1, \cdots, N, & \\ \alpha_1(t_n)u_n(0) + \alpha_2(t_n)u_n'(0) &= \alpha(t_n). \\ H(u_n(s_n), u_n'(s_n), \frac{u_n(s_n) - u_{n-1}(s_n)}{\Delta t}, s_n, \frac{s_n - s_{n-1}}{\Delta t}, t_n) &= 0, \end{aligned} \tag{2.12}$$

dengan $u_n = u(x,t_n), u'_n = d/dx(u_n)$ dan $s_n = s(t_n)$. Untuk setiap tingkat waktu n, persamaan ini harus diselesaikan untuk fungsi u_n dan batas bebas s_n (bahkan bila diperlukan, u_{n-1} dapat diperluas secara diferensial sebagai fungsi linear di $[s_{n-1},\infty)$).

Untuk hampiran di atas, kita gunakan formula beda mundur untuk variabel waktu, yaitu metode diskretisasi *implisit* orde satu. Dapat juga digunakan misalnya metode implisit dengan orde lebih tinggi, seperti Crank-Nicholson, tetapi harus diperhatikan apakah tingkat akurasi untuk penentuan s_n juga lebih baik. Begitu pula, formula beda maju dalam waktu dapat digunakan, tetapi untuk kasus batas bebas, kita berhadapan dengan masalah bahwa secara eksplisit kita harus mengetahui di mana posisi batas bebasnya. Karena itu lebih cenderung dipilih metode implisit, karena algoritma penyelesaian tidak tergantung secara langsung pada posisi s_n.

2.2. **Invariant Imbedding.** Perhatikan bahwa persamaan diferensial biasa di atas berbentuk linear dalam u_n. Kelinearan ini, dapat dimanfaatkan dengan cara lain untuk mengatasi ketakstabilan, setidaknya untuk masalah Stefan [33]. Teknik yang akan disajikan dikenal sebagai metode *invariant imbedding* dan secara rinci diuraikan di [17]. Kita akan berikan ringkasannya berikut ini. Masalah (2.12) dapat dituliskan sebagai sistem persamaan diferensial orde-1

$$\begin{aligned} u'_n &= v_n/k(x,t_n), \\ v'_n &= u_n\tfrac{c(x,t_n)}{\Delta t} - \tfrac{a(x,t_n)}{k(x,t_n)}v_n \\ &\quad -b(x,t_n)u_n + f(x,t_n) - \tfrac{c(x,t_n)}{\Delta t}u_{n-1}, \end{aligned} \tag{2.13}$$

dengan syarat batas yang diberikan. Agar tepatnya, kita anggap $\alpha_2(t) \neq 0$ di $[0,T]$, dan untuk memudahkan, kita pilih $\alpha_2 = 1$. (Untuk kasus $\alpha_1 \neq 0$, peran dari u_n dan v_n kita pertukarkan. Untuk rincinya lihat di [17] atau [18]). Sehingga syarat batas untuk sistem di atas, berbentuk:

$$\begin{aligned} v_n &= [\alpha(t_n) - \alpha_1(t_n)u_n(0)]\cdot k(0,t_n), \\ 0 &= H(u_n(s_n), u'_n(s_n), \frac{u_n(s_n)-u_{n-1}(s_n)}{\Delta t}, s_n, \frac{s_n - s_{n-1}}{\Delta t}, t_n). \end{aligned} \tag{2.14}$$

Penyelesaian (2.13) dan (2.14), jika ada, termuat dalam keluarga fungsi $\{u_n(x,r), v_n(x,r)\}$ dari solusi (2.13) dengan syarat:

$$\begin{aligned} v_n &= [\alpha(t_n) - \alpha_1(t_n)u_n(0)]\cdot k(0,t_n), \\ u_n &= r, \end{aligned} \tag{2.15}$$

untuk r parameter bebas yang ada di rentang semua bilangan real. (Mencari r yang konsisten dengan (2.14) akan diperoleh dengan mempergunakan metode shooting untuk menyelesaikan masalah syarat batas).

Diketahui bahwa u_n dan v_n memiliki perwakilan berdasarkan metode variasi parameter:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} v_n \\ u_n \end{pmatrix} &= \Phi_n(x,0)\begin{pmatrix} -\alpha_1(t_n)r \\ 0 \end{pmatrix} + \Phi_n(x,0)\begin{pmatrix} \alpha(t_n) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\quad + \int_0^x \Phi_n(x,y)\begin{pmatrix} f(y,t_n) - \frac{c(y,t_n)}{\Delta t_0}u_{n-1}(y) \\ 0 \end{pmatrix} dy, \end{aligned} \tag{2.16}$$

dengan Φ merupakan matriks fundamental yang memenuhi

$$\Phi' = \begin{pmatrix} -\hat{a}(x,t_n) & \hat{c}(x,t_n) \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\Phi, \qquad \Phi(y,y) = I,$$

dengan

$$\hat{a}(x,t_n) = \frac{a(x,t_n)}{k(x,t_n)}, \qquad \hat{c}(x,t_n) = \frac{c(x,t_n)}{\Delta t} - b(x,t_n).$$

Jika persamaan kedua di (2.16) diselesaikan untuk r, dan kemudian hasilnya disubstitusikan ke v_n, akan diperoleh hubungan berikut antara u_n dan v_n untuk setiap $r \in (-\infty, \infty)$

$$v_n(x,r) = R_n(x)u_n(x,r) + w_n(x). \tag{2.17}$$

Bentuk ini tak lain merupakan transformasi Riccati untu persamaan diferensial orde 2. Karenanya haruslah berlaku untuk setiap r, bila dibandingkan ke (2.15) diperoleh

$$R_n(0) = -\alpha_1(t_n)k(0,t_n), \qquad w_n(0) = \alpha(t_n)k(0,t_n).$$

Karena u_n dan v_n memenuhi (2.13) dan R_n dan v_n merupakan kombinasi sederhana dari komponen Φ dan integral tentu di (2.16), bentuk (2.17) dapat diturunkan sehingga diperoleh

$$v_n' = R_n'u_n + R_nu_n' + w_n' = R_n'u_n + \frac{R_n(R_nu_n + w_n)}{k(x,t_n)} + w_n'. \tag{2.18}$$

Substitusikan persamaan diferensial untuk v_n' dan perwakilan (2.16) untuk v_n dan kumpulkan semua suku yang memuat u_n, akan diperoleh

$$\begin{aligned}[R_n' &+ \frac{R_n^2}{k(x,t_n)} - \hat{c}(x,t_n) + \hat{a}(x,t_n)R]u_n(x,r) \\ &= [-w_n' - \frac{R_nw_n}{k(x,t_n)} - \hat{a}(x,t_n)w_n + f(x,t_n) - \frac{c(x,t_n)}{\Delta t}u_{n-1}(x)].\end{aligned}$$

Hubungan ini berlaku untuk setiap r dan karena suku berkurungsiku bebas dari r, maka haruslah musnah. Sehingga akhirnya kita peroleh bahwa fungsi R_n dan w_n di transformasi Riccati (2.17) merupakan solusi masalah syarat awal berikut yang terdefinisi, yang dikenal sebagai persamaan *invariant imbedding*:

$$\begin{aligned} R_n' &= \hat{c}(x,t_n) - \frac{R_n^2}{k(x,t_n)} - \hat{a}(x,t_n)R_n \qquad (2.19)\\ R_n(0) &= -\alpha_1(t_n)k(0,t_n),\\ w_n' &= -[\frac{R_n}{k(x,t_n)} + \hat{a}(x,t_n)]w_n\\ &\quad + f(x,t_n) - \frac{c(x,t_n)}{\Delta t}u_{n-1}(x), \qquad (2.20)\\ w_n(0) &= \alpha(t_n)k(0,t_n). \end{aligned}$$

Perwakilan (2.17) harus dipenuhi pula untuk setiap x, jadi berlaku pula untuk batas bebas s_n. Sehingga $u_n(s_n)$ dan s_n harus ditentukan sehingga

$$H(u_n(s_n), \frac{R_n u_n(s_n) + w_n(s_n)}{k(s_n,t_n)}, \frac{u_n(s_n) - u_{n-1}(s_n)}{\Delta t}, s_n, \frac{s_n - s_{n-1}}{\Delta t}, t_n) = 0.$$

Dengan kata lain, batas bebas s_n dan nilai $u_n(s_n)$, merupakan akar dari sistem dua persamaan:

$$H(u, \frac{R_n(x)u + w_n(x)}{k(x,t_n)}, \frac{u - u_{n-1}(x)}{\Delta t}, x, \frac{x - s_{n-1}}{\Delta t}, t_n) = 0. \qquad (2.21)$$

Jika pasangan akar (u_n, s_n) dapat ditemukan, maka (2.12) tereduksi menjadi masalah dua-titik biasa dengan syarat $v_n(0) = \alpha(t_n) - \alpha_1(t_n)u_n(0)$, dengan $u_n(s_n)$ ditentukan dari (2.21), di interval $[0, s_n]$ yang tetap. Alternatif lain, u_n dapat diperoleh dengan cara mengintegralkan transformasi Riccati (2.17):

$$k(x,t_n)u_n' = v_n = R_n(x)u_n + w_n(x), \qquad (2.22)$$

dengan $u_n(s_n)$ ditentukan dari (2.21), dengan cara mundur dari s_n ke 0. Pendekatan ini biasanya digunakan bila diselesaikan secara numerik. Lagi pula, seringkali mungkin mereduksi (2.21) dengan mengeliminasi salah satu u ataukah u_x. Misalnya, hanya persamaan skalar yang perlu diselesaikan untuk masalah yang diperkenalkan di atas:

(i) $$\begin{aligned} \phi_n &= \tfrac{R_n(x)u_n(x)+w_n(x)}{k(x,t_n)} + \lambda\tfrac{x-s_{n-1}}{\Delta t} + \mu_2(x,t_n)\\ &= R_n(x)(-\mu_1(x,t_n)) + w_n(x)\\ &\quad +[\lambda\tfrac{x-s_{n-1}}{\Delta t} + \mu_2(x,t_n)]k(x,t_n) = 0; \end{aligned}$$

(ii) $\phi_n(x) = w_n(x) = 0$;

(iii) $\phi_n = -R_n(x)\mu_1(x,t_n) + w_n(x) + \mu_2(x,t_n)k(x,t_n) = 0$;

(iv) $$\begin{aligned} \phi_n &= R_n(x)\cdot\mu_1(x,t_n)e^{\mu_2/x} + w_n(x)\\ &\quad -[\mu_3 - \mu_1(x,t_n)e^{\mu_2/x}]\tfrac{x-s_{n-1}}{\Delta t}\,k(x,t_n) = 0; \end{aligned}$$

(v) $\phi_n = R_n(x)\psi_n(x) + w_n(x) - \mu_1(\psi_n^4 - \mu_2^4)\cdot k(x,t_n) = 0$;
dengan $\psi_n(x) = \mu_5 - \mu_4/(\ln((x - s_{n-1})/\Delta t) - \ln\mu_3)$.

Jadi, untuk setiap masalah yang diperkenalkan di atas, pendekatan yang sama dapat digunakan. Persamaan *invariant imbedding* (2.19) dan (2.20) diintegrasikan maju dalam variabel x dan fungsional $\phi(x)$

dievaluasi. Bila memotong sumbu-x batas bebas s_n ditetapkan dan $u_n(s_n)$ ditentukan dari (2.21), yang memungkinkan menghitung u_n sepanjang $[0, s_n]$ misalnya dengan cara mengintegralkan (2.22). Dari sini jelaslah bahwa langkah langkah tersebut di atas dapat diselesaikan secara numerik.

3. Kekonvergenan Metode Rothe

Untuk mendemonstrasikan bagaimana teknik solusi di atas dapat digunakan untuk memperoleh bukti eksistensi, tinjau masalah model berikut,

$$\begin{array}{rcl} u_{xx} - u_t & = & f(x,t), \\ u(0,t) & = & \alpha(t), \\ u(s(t),t) & = & 0, \\ u_x(s(t),t) & = & 0, \\ u(x,0) & = & 0, \\ s(0) & = & 0. \end{array} \tag{3.1}$$

Sebagaimana dikatakan, masalah jenis ini muncul di teori *optimal stopping,* dengan u berkait dengan fungsi imbalan (*reward function/value function*) terkait dengan satu proses Brown dan $s(t)$ merupakan batas penghentian optimum dari proses (Lihat [35] dan rujukan yang dikutip).

Persamaannya cukup sederhana tetapi menonjolkan aspek matematis yang cukup pentingkarena bukti keujudan solusi metode garis sebelumnya memustahilkan musnahnya gradien di batas bebas [35],[38]. Sehingga, beberapa hasil di [19] cukup berbeda secara signifikan dibanding literatur lainnya. Kita akan tunjukan secara berurutan bahwa berdasarkan sejumlah hipotesis:

i) persamaan metode garis untuk (3.1) memiliki solusi di setiap tingkat waktu diskret;
ii) bahwa $u_n, u_n', (u_n - u_{n-1})/\Delta t$, dan $(s_n - s_{n-1})/\Delta t$ terbatas seragam;
iii) penyelesaian yang terkait (3.1) yang didefinisikan dalam (u_n, s_n) konvergen ke sebuah solusi dari (3.1).

Dua alat utama yang penting digunakan secara berulang, yaitu prinsip maksimum untuk persamaan diferensial (eliptik) biasa (lihat misalnya [29]) dan teorema Ascoli mengenai kekompakan barisan terbatas seragam dari fungsi ekikontinu (lihat misalnya [31]).

Hampiran metode Rothe untuk masalah batas bebas (3.1) ialah:

$$\begin{aligned} u_n'' - (u_n - u_{n-1})/\Delta t &= f(x, t_n), \qquad (3.2)\\ & \quad n = 1, \cdots, N,\ \Delta t = T/N, \end{aligned}$$

atau (3.3)

$$\begin{aligned} v_n' &= u_n/\Delta t + f(x,t_n) \\ &\quad -u_{n-1}/\Delta t, \qquad v_n(0) = \alpha(t_n), \qquad (3.4)\\ u_n' &= v_n, \qquad u_n(s_n) = v_n(s_n) = 0, \qquad (3.5)\\ u_0 &= 0, \qquad (3.6) \end{aligned}$$

Persamaan *invariant imbedding* yang terkait ialah

$$\begin{aligned} v_n' &= R(x)u_n(x) + w_n(x), \qquad (3.7)\\ R(x) &= \frac{1}{\Delta t} - R(x)^2, \qquad R(0) \qquad (3.8)\\ w_n' &= -R(x)w_n + f(x,t_n) - u_{n-1}/\Delta t,\\ & \quad w_n(0) = \alpha(t_n), \qquad (3.9) \end{aligned}$$

dan batas bebas yang ditentukan sebagai akar s_n dari persamaan

$$\phi_n(x) = w_n(x) = 0.$$

Untuk membuktikan keujudan solusi (u_n, s_n) di setiap tingkat waktu diskret n dan kekonvergenan diperlukan hipotesis berikut ini.

H.1. $\alpha(t) \leq 0, t \in (0,T]$; terdapat fungsi kontinu C dan c sehingga $C(t) \geq f(x,t) \geq c(t) \geq c > 0, (x,t) \in (0,\infty) \times [0,T]$.

H.2.i. Terdapat konstanta Lipschitz $L_i \geq 0, i = 1,2,3$, sehingga

$$\begin{aligned} 0 \geq \alpha(t) - \alpha(r) &\geq L_1(r-t), \qquad t, r \in (0,T]\\ 0 \geq f(x,t) - f(x,r) &\geq L_2(r-t), \qquad t, r \in (0,T],\ \text{seragam di } x,\\ \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) - \frac{\partial f}{\partial x}(x,r)\right| &\geq L_3(r-t), \qquad t, r \in (0,T],\ \text{seragam di } x. \end{aligned}$$

H.2.ii. Terdapat syarat batas yang konsisten sehingga $\alpha(0) = 0$.

Keujudan solusi ditunjukan lema berikut,

Lema 3.1. Dengan hipotesis H.1., solusi metode Rothe $\{u_n, s_n\}$ ada untuk setiap $n = 1, \cdots, N$.

Bukti 3.2. Untuk lengkapnya lihat di [19].

Untuk menunjukan kekonvergenan bersamaan dengan $\Delta t \to 0$, harus ditunjukan bahwa batas bebas yang dihitung $\{s_n\}_{n=0}^{N}$ dapat digunakan untuk mendefinisikan batas $s(t)$ yang kontinu Lipschitz bersamaan dengan $\Delta t \to 0$. Satu taksiran berbentuk

$$|s_n - s_{n-1}| \leq K\Delta t$$

cukup untuk tujuan ini yang dengan mudah diperoleh dari uraian Taylor

$$u_n(s_{n-1}) = u_n(s_n)+u_n'(s_n)(s_n-s_{n-1})+\frac{1}{2}u_n''(\zeta)(s_n-s_{n-1})^2, \qquad \zeta \in (s_{n-1}, s_n) \tag{3.10}$$

dengan membatasi $u_n(s_{n-1})$ dari atas dan $u_n''(\zeta)$ dari bawah. Anggapan bahwa asumsi hipotesis H.1. dan H.2. berlaku.

Lema 3.3. Syarat kemonotonan berikut berlaku

$$u_n(x) \geq u_{n-1}(x) \geq 0, \qquad s_n \geq s_{n-1.}$$

Bukti 3.4. Lihat di [19].

Untuk masalah Stefan dan filtrasi, suku $u_n'(s_n)$ tidaklah musnah, dan karenanya cukup diturunkan batas berbentuk $u_n'(s_{n-1}) \leq K\Delta t$ di uraian Taylor di atas (lihat [18] dan [38]). Untuk (3.2) di atas, batas berbentuk $|u_n'(s_{n-1})| \leq K\Delta t(s_n - s_{n-1})$ merupakan hal perlu. Kita akan trunkan dengan membatasi $|u_n'|$ dengan $K\Delta t$ di $[s_{n-1}, s_n]$. Lema berikut diperlukan untuk bukti hasil tersebut. Bukti lema dan Teorema dapat di lihat di [19].

Lema 3.5. Terdapat sebuah konstanta K sehingga $|u_n' - u_{n-1}'| \leq K\Delta t$ di $[0, s_n]$.

Teorema 3.1. Dengan hipotesis H.1. dan H.2., terdapat satu konstanta K yang bebas dari Δt sehingga

$$s_{n+1} - s_n \leq K\,\Delta t.$$

Dari Teorema tersebut, dapat diperoleh hasil $s_n \leq KT$ untuk suatu K yang konstan, sehingga dengan demikian kita perlu hanya memperhatikan masalah (3.2) di $[0, \tilde{X}]$ untuk $\tilde{X} = KT$. Lebih jauh dengan memanfaatkan lema 3.5 sebelum ini, diperoleh $|u_n(x) - u_{n-1}(x)| \leq K\Delta t|s_n - x|$, sehingga

$$|\frac{u_n(x) - u_{n-1}(x)}{\Delta t}| \leq K \tag{3.11}$$

seragam di x dan n untuk setiap $x \in [0, \tilde{X}]$.

Solusi aproksimasi metode Rothe (u_n, s_n) dapat digunakan untuk membuktikan solusi pendekatan masalah batas bebas (3.1). Tetapkan

$$\begin{aligned} S_N(t) &= \frac{1}{\Delta t}\{(t-t_{n-1})s_n + (t_n - t)s_{n-1}\}, \\ & \qquad\qquad t \in (t_{n-1}, t_n] \quad (3.12) \\ U_N(t) &= \frac{1}{\Delta t}\{(t-t_{n-1})u_n + (t_n - t)u_{n-1}\}. \end{aligned}$$

Dengan mempergunakan teorema Ascoli, dapat ditunjukkan terdapat anak barisan $\{N_l\}$ sedimikian rupa sehingga S_{N_l} dan U_{N_l} konvergen secara seragam ke fungsi limit $s(t)$ dan $u(x,t)$ yang kontinu Lipschitz.

Untuk menunjukkan bahwa $s(t)$ dan $u(x,t)$ menyelesaikan masalah (3.1), untuk kemudahan perlu diperkenalkan konsep solusi lemah untuk masalah batas bebas.

Definisi 3.6. *Solusi lemah masalah syarat batas (3.1) ialah sebuah fungsi u yang terukur dan terbatas serta fungsi s yang kontinu dengan $s(0)=0$, yang untuk fungsi sebarang $\phi \in D$ dipenuhi*

$$\int_0^T \int_0^{s(t)} [(\phi_{xx} - \phi_t)u - f\phi]\, dxdt \; - \int_0^T \phi(0,t)\alpha(t)\, dt. \tag{3.13}$$

Dengan D menyatakan ruang fungsi uji. Ruang fungsi uji D terdiri atas fungsi dua variabel yang terdefinisi di $[0,\tilde{X}] \times [0,T]$ yang terturunkan 2 kali di x dan sekali di t di $[0,\tilde{X}] \times [0,T]$ dan berlaku $\phi(x,T) = \phi_x(0,t)$.

Dengan mempergunakan konsep solusi lemah ini, dapat ditunjukkan mengenai keujudan solusi. Sebagaimana dimanfaatkan dalam menunjukkan keujudan solusi dalam persamaan panas pada batas yang tetap, bahwa solusi lemah yang cukup licin merupakan syarat kecukupan untuk ujudnya solusi klasik, hal yang sama dapat diperluas untuk kasus batas bebas. Kemudian, dapat diperlihatkan ketunggalan solusi lemah. Untuk diskusi rinci mengenai hal ini lihat di [19]. Teorema berikut menunjukkan bahwa solusi akan konvergen ke solusi klasik yang tunggal.

Teorema 3.2. Dengan hipotesis H.1., H.2., solusi metode garis yang didefinisikan oleh (3.12) konvergen secara seragam ke sebuah solusi klasik yang tunggal dari masalah syarat batas bebas (3.1).

Bukti 3.7. Rincian pembuktian dapat dilihat di [19].

4. Contoh.

4.1. **Optimal Stopping.** Masalah batas bebas berikut ini bermula dari teori *optimal stopping* sebagaimana dibahas oleh [35]

$$\begin{aligned} u_{xx} - u_t &= 0, \\ u_x(0,t) &= \frac{1}{2}, \\ u(s(t),t) &= \frac{1}{2t}, \quad u_x(s(t),t) = 0, \quad s(0) = 0 \end{aligned}$$

Meski tidak diketahui mengenai hasil analitik yang menunjukkan keujudan solusi untuk masalah singular ini, dapat ditunjukkan bahwa satu solusi aproksimasi (u_n, s_n) dapat dihitung dengan mempergunakan metode Rothe dari masalah batas bebas yang berkaitan.

Jika didefinisikan

$$w = \frac{1}{2t} - u,$$

maka w akan memenuhi masalah batas bebas implisit

$$\begin{aligned} w_{xx} - w_t &= \frac{1}{2t^2}, \\ w_x(0,t) &= -\frac{1}{2}, \\ w(s(t),t) &= w_x(s(t),t) = 0, \quad s(0) = 0. \end{aligned}$$

Karena data singular di $(x,t) = (0,0)$, teori di atas tidak berlaku. Akan tetapi dengan melicinkan data dengan cara

$$f_\varepsilon(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{2\varepsilon^2}, & t \in [0,\varepsilon], \\ \frac{1}{2t^2}, & t > \varepsilon, \end{cases}$$

$$\alpha_\varepsilon(x,t) = \begin{cases} -\frac{1}{2\varepsilon}, & t \in [0,\varepsilon], \\ -\frac{1}{2}, & t > \varepsilon, \end{cases}$$

kita tinjau

$$\begin{aligned} w_{xx} - w_t &= f_\varepsilon(x,t), \\ w_x(0,t) &= \alpha_\varepsilon(t), \\ w(s(t),t) &= w_x(s(t),t) = 0, \quad s(0) = 0. \end{aligned}$$

Untuk ε yang tetap, fungsi f_ε dan α_ε memenuhi hipotesis H.1. dan H.2., sehingga untuk $\varepsilon > 0$ penyelesaian w memiliki solusi dan tunggal.

Jika kita selesaikan secara numerik, kita peroleh bahwa persamaan Riccati memiliki solusi eksak

$$R(x) = \frac{1}{\sqrt{\Delta t}} \tanh \frac{x}{\sqrt{\Delta t}}\ ,$$

sementara persamaan (2.20) dan (2.22) diintegralkan secara numerik. Batas bebas s_n di tingkat waktu diskret ke-n merupakan akar dari $w_n(x) = 0$ dan dapat diperoleh dengan mempergunakan interpolasi linear di antara dua titik kisi berturutan di mana w_n berganti tanda.

Kasus $\varepsilon = 0$ merupakan kasus yang menarik, barisan $\{w^\varepsilon(x,t), s^\varepsilon(t)\}$ dihitung dengan mengambil $\varepsilon = \Delta t$ (yaitu dengan mengabaikan singularitas data). Hasil numerik metode Rothe dibandingkan dengan hasil [35] untuk posisi batas bebas dapat di lihat di [19].

4.2. **Opsi Jual Amerika (*American Put Option*).** Valuasi opsi Amerika atas saham dengan imbalan ψ dan jatuh tempo T dapat dinyatakan sebagai $V(S,0)$ dengan $S(0) = S$ dan $V(S,t)$ merupakan solusi dari masalah batas bebas berikut. Khususnya untuk kasus Opsi Jual Amerika, untuk setiap $t > 0$ terdapat $s^*(t)$ yang tunggal sehingga:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Sigma(s,t)^2\frac{\partial^2 V}{\partial s^2}(s,t)+[r(t)-\rho(t)]s\frac{\partial V}{\partial s}(s,t) & & \\
-r(s,t)V(s,t) &=& -\frac{\partial V}{\partial t}(s,t),\\
& & \quad s\in(s^*,\infty), t\in[0,T),\\
V(S,t) &\to& (\kappa-s)^+,\quad t\to T,\\
V(S,t) &\to& 0, s\to\infty,\\
& & \quad t\in[0,T),\\
V(S,t) &>& (\kappa-s)^+,\\
& & s\in(s^*,\infty),\\
& & \quad t\in[0,T),\\
V(S,t) &\to& (\kappa-s^*(t)),\ s\to s^*(t)+,\\
& & \quad t\in[0,T),\\
\frac{\partial V}{\partial t}(S,t) &=& -1,\ s\to s^*(t)+,\\
t\in[0,T). & &
\end{aligned}$$

Jika dilakukan normalisasi

$$u = V/\kappa, \qquad x = s/\kappa, \tag{4.1}$$

dan untuk kemudahan, gunakan variabel waktu yang baru

$$\tau = T - t.$$

Maka diperoleh masalah batas bebas:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\sigma(x,\tau)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,\tau) + & & \qquad (4.2)\\
b(x,\tau)\frac{\partial u}{\partial x}(x,\tau) - r(x,\tau)u(x,\tau) &=& -\frac{\partial u}{\partial \tau}(x,\tau), \qquad (4.3)\\
& & x\in(s(\tau),\infty), \tau\in(0,T], (4.4)\\
u(s(\tau)+,\tau) &=& 1-s(\tau),\quad 0<\tau\le T, \quad (4.5)\\
\frac{\partial u}{\partial x}(s(\tau)+,\tau) &=& -1,\ \tau\in(0,T], \qquad (4.6)\\
u(x,\tau) &\to& 0, x\to\infty, \tau\in(0,T], \qquad (4.7)\\
u(x,\tau) &=& 0, x\in(s(0)=1,\infty). \qquad (4.8)
\end{aligned}$$

Hampiran Rothe untuk setiap tingkat waktu-n:

$$\sigma(x,\tau_n)u_n'' + b(x,\tau_n)u_n' - r(x,\tau_n)u_n - \frac{u_n-u_{n-1}}{\Delta\tau} = 0, \tag{4.9}$$

Atau, jika ditulis secara umum:

$$u_n'' + d(x,\tau_n)u_n' - c(x,\tau_n)u_n = g(x,\tau_n), \tag{4.10}$$

Sehingga kita peroleh sistem persamaan diferensial orde-1:

$$u_n' = v_n \quad (4.11)$$

$$v_n' = c(x,\tau_n)u_n - d(x,\tau_n)v_n + g(x,\tau_n), \quad (4.12)$$

Dengan mempergunakan transformasi Riccati,

$$u(x) = R(x)v(x) + w(x) \quad (4.13)$$

diperoleh persamaan *invariant imbedding*,

$$R' = 1 + d(x,\tau_n)R - c(x,\tau_n)R^2, \quad R(X) = 0 \quad (4.14)$$

$$w' = -c(x,\tau_n)R(x)w - R(x)g(x,\tau_n), \quad w(X) = h(\tau_n). \quad (4.15)$$

dengan $[0, X]$ pemenggalan dari interval tak hingga $[0, \infty)$, dengan $h(\tau_n)$ akan ditentukan kemudian. Dengan mengintegralkan secara mundur persamaan *invariant imbedding*, kemudian kita peroleh batas bebas s_n dengan mencari akar dari:

$$\phi(x) = R(x) - w(x) + (1 - x).$$

Jika batas bebas s_n sudah diketahui, integralkan

$$v_n' = c(x,\tau_n)(R(x)v_n + w(x)) - d(x,\tau_n)v_n + g(x,\tau_n), \quad v_n(s_n) = -1,$$

sepanjang selang $[s_n, X]$. Kemudian substitusikan ke transformasi Riccati, untuk mendapatkan u_n. Solusi diperluas ke selang (s_∞, s_n) dengan mempergunakan fungsi linear.

5. Penutup.

Penggunaan metode garis lateral yang tidak terkait dengan persamaan panas atau kah memiliki bentuk khusus dari data batas pada batas yang tetap mau pun batas bebas, disajikan dalam tulisan [19] bagaimana teknik penyelesaiannya.

References

[1] J.G. Andrews & D.R. Athey, Drilling Holes with a Laser, dalam J.G. Andrew& R.R. McLone (ed), *Mathematical Modelling.*, Butterworths, 1976.

[2] T. Araki, Y. Sagara, K. Abdullah & A.H. Tambunan, Transport properties of cellular Food Materials undergoing Freeze-Drying, Drying Technology, **19**(2), 2001, 297-312

[3] T. Araki, Y. Sagara, A.H. Tambunan & K. Abdullah, Measurement of Transport Properties for the Dried Layer of Several Food Materials ,Bull.Keteknikan Pertanian, **12**(2), 2xxx, p-ppp

[4] R.D. Bachelis, V. G. Melamed & D.S.Shlyaver, The solution of the problem of Stefan type by the straight line method, Zh.Vyčisl.Mat. Fiz., **v9**, pp 585-594.

[5] I.Berezin & N.Zhidkov, *Computing Methods,* vol. II., Pergamon Press., Oxford, England, 1965.

[6] A. Bossavit, A. Damlamian, & M. Fremond (eds), *Free Boundary Problems: Applications and Therory. Vol IV*, Pitman, 1985.

[7] Y. Chuang & O.Ehrich, On the integral technique for spherical growth problems, Int.J. Heat Mass Transfer, **17**, 1974, 945-953.

[8] J. Crank & R.S. Gupta, A method for solving moving boundary problems in heat flow using cubic splines or polynomials, J. Inst. Math. Appl., **1972**, 296-304.

[9] M. Farid, The moving boundary problems from melting and freezing to drying and frying of food, Chem. Eng. Proc., **41**, 2002, 1-10.

[10] A.D. Garnadi, Approximate Solution of nonlinear boundary value problems of Heat Conduction for simulation of freeze drying. (Constant Temperatures Heat Source), Manuskrip.

[11] A.D. Garnadi, Approximate Solution of nonlinear boundary value problems of Heat Conduction for simulation of freeze drying. (Linearized Radiation Boundary Condition), Manuskrip.

[12] A.D. Garnadi, A Ubiquitous Lambert W-functions, (Notes on Messinger Model of Ice accretion on aircraft structures), Manuskrip.

[13] D.W.Goodwin, Lasers in Surgery, Phys.Technol., **9**, 1978, 248-253.

[14] A. Hollis, S. Rastegar, L. Descloux, G. Delacretaz, & K. Rink, Zona Pellucida Microdrilling with a 1.48 μm diode laser, IEEE Engineering in Med. Biol., May/June 1997, 43-47.

[15] S. Kruzhov, On Some problems with unknown boundaries for the heat equation, Prikl. Math. Meh., **31** (1967), 1009-1020.

[16] U.A. Ladyzhenskaya, V.A. Solonnikov & N.N. Uraltseva, *Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type*, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1968.

[17] G.H. Meyer, *Initial Value Methods for Boundary Value Problems*, Academic Press

[18] G.H. Meyer, On a free interface problem for linear ordinary differential equations and the one phase Stefan problem, Numer. Math., **16**, (1970), pp 248-267.

[19] G.H. Meyer, One-dimensional parabolic free boundary problems, SIAM Review, **19**, (1977), 17-34.

[20] G.H. Meyer, Heat transfer during fluidized-bed coating, Int. J. Numer. Meth. in Engrg.

[21] G.H. Meyer, The method of lines, line SOR and Free Boundaries, dalam K.I. Gross(ed),*Mathematical Methods in Energy Research*, SIAM, 1985, 59-74.

[22] G.H. Meyer, On Pricing American and Asian Options with PDE Methods, Acta. Math. Univ. Commenianae, **LXX**(1), 2001, 153-165.

[23] G.H. Meyer & J. van der Hoek, The valuation of American Option with the Method Lines, Adv. Futures Options Res., **9**, (1997), 265-285.

[24] W.J. Meyer, H.U. Akay, & M.J. Pikal, A computational model for finite element analysis of the freeze drying process, **148**, 1977, 105-124.

[25] T.G. Myers, D.W. Hammond., Ice and water film growth from incoming supercooled droplets., Int. J. Heat Mass Transf., **42** (1999),2233-2242.

[26] J.R. Ockendon & W.R. Hodgkins (eds), *Moving Boundary Problems in Heat Flow and Diffusion,* Clarendon Press, Oxford, England, 1975.

[27] J.A. Puente, G. Lambrinos, & M. Sakly, Sublimation of ice and frozen dispersed media : physical phenomena, equations and experimental study, dalam, [6], 305-317.

[28] S. Rastegar, M. Motamedi, A.J. Welch, & L.J. Hayes, A Theoretical Study of the effect of optical properties in Laser Ablation of Tissue., IEE Trans. Biomed. Eng., **36**(12), 1989, 1180-1187.

[29] H.M. Protter & H.F. Weinberger, *Maximum Principles in Differential Equations*, Prentice-Hall, Englewood-Cliffs, N.J., 1967.

[30] E. Rothe, Zweidimensionale parabolische Randwertaufgaben als Grenzfall eindimensionaler Rasndwertaufgaben, Math.Ann., **102**, (1929/30), 650-670.

[31] H.L. Royden, *Real Analysis,* MacMillan, London, 1978.

[32] L.I. Rubinstein, *The stefan problem,* Transl. Math. Monographs, vol 27, American Matemathical Society, Providence, R.I., 1971.

[33] A. Sachs, Zur Struktur eines Algorithms zur Lösung freier Randwertprobleme parabolischer Differentialoperatoren, Lecture Notes in Math., vol 395, Springer-Verlag, Berlin, 1974.

[34] G.G. Sackett, An implicit free boundary value problem for the heat equation, SIAM J. Numer. Anal., **8**, 1971, 80-95.

[35] G.G. Sackett, Numerical Solution of a parabolic free boundary problem arising in statistical decision theory., Math. Comp., **25**, 1971, 425-434.

[36] N.L. Schryer, Designing Software for one-dimensional Partial Differential Equations, ACM Trans.On Math.Soft., **16**(1), 1990, 72-85.

[37] F.P. Vasilev, the method od straight lines for the solution of a one phase problem of the stefan type, Z. Vycisl. Mat. i. mat. Fiz., **8**, 1968, 64-78.

[38] T.D. Wentzel, A free boundary problem for the heat equation, Dokl. Akad. Nauk. SSSR, **131**, 1960, 1000-1003.

[39] P. Wilmot, S. Howison, & J. Dewynne, 1995, The Mathematics of Financial Derivatives, Cambridge Univ. Press.