PENDUGAAN KOMPONEN PERIODIK FUNGSI INTENSITAS BERBENTUK FUNGSI PERIODIK KALI TREN LINEAR SUATU PROSES POISSON NON-HOMOGEN

W. ISMAYULIA[1], I W. MANGKU [2], SISWANDI[2]

Abstract

In this manuscript, estimation of the periodic component of intensity having form periodic function multiplied by the linear trend of a non homogeneous Poisson process is discussed. The estimator is constructed using a single realization of the Poisson process observed in the interval $[0, n]$. It is assumed that the period of the periodic component is known. The convergence of the Mean Square Error (MSE) of the estimator has been proved. In addition, asymptotic approximations to the bias, variance, and Mean Square Error (MSE) of the estimator have been proved. An asymptotic optimal bandwidth is also given.

Keywords : consistent estimator, intensity function, mean squared error, periodic Poisson processes.

PENDAHULUAN

Latar Belakang

Terdapat banyak permasalahan dalam kehidupan sehari-hari yang dapat dimodelkan dengan suatu proses stokastik. Permasalahan tersebut misalnya proses kedatangan pelanggan ke suatu pusat layanan (bank, kantor, supermarket, dan sebagainya), proses kedatangan pengguna *line* telepon dengan periode satu hari atau juga banyaknya kendaraan yang melewati suatu jalan raya pada suatu interval waktu tertentu yang hanya bisa diamati sekali. Untuk itu, proses stokastik mempunyai peranan cukup penting dalam berbagai bidang dalam kehidupan sehari-hari.

Proses stokastik ada dua yaitu proses stokastik dengan waktu diskret dan proses stokastik dengan waktu kontinu. Salah satu bentuk khusus dari proses stokastik dengan waktu kontinu adalah proses Poisson periodik. Proses Poisson periodik adalah suatu proses Poisson dengan fungsi intensitas berupa fungsi periodik.

Contoh dalam kehidupan sehari-hari yang dapat dimodelkan dengan proses stokastik misalnya proses kedatangan nasabah ke suatu bank dalam periode satu hari. Fungsi intensitas lokal $\lambda(s)$ pada proses tersebut menyatakan laju kedatangan nasabah pada waktu *s*. Pada umumnya fungsi intensitas tidak

---

[1] Mahasiswa Program Sarjana, Departemen Matematika, Fakultas Ilmu Pengetahuan Alam, Jalan Meranti Kampus IPB Dramaga Bogor, 16680.

[2] Departemen Matematika, Fakultas Ilmu Pengetahuan Alam, Jalan Meranti Kampus IPB Dramaga Bogor, 16680.

diketahui tetapi banyak yang periodenya diketahui yaitu τ. Untuk menyusun penduga yang konsisten, diperlukan banyak data.

Diasumsikan fungsi intensitas tersebut adalah fungsi periodik agar data pengamatan di berbagai selang waktu yang berbeda dapat digunakan untuk menduga fungsi intensitas pada suatu titik s. Fungsi intensitas pada hari berikutnya dapat diprediksi dengan menggunakan proses Poisson periodik. Pada umumnya bentuk fungsi intensitas pada hari ini dan hari berikutnya hampir sama. Sedangkan jika pada hari berikutnya jumlah nasabahnya bertambah, maka fungsi intensitas akan lebih besar dibanding hari sebelumnya.

Ada beberapa fenomena yang kurang cocok dimodelkan dengan proses Poisson periodik tanpa memperhitungkan suatu tren. Untuk itu, fungsi intensitasnya perlu mengakomodasi adanya suatu tren. Pada kajian ini dibatasi pada fungsi intensitas yang berbentuk fungsi periodik kali tren linear. Sehingga karya ilmiah ini mengkaji penduga fungsi intensitas yang berbentuk fungsi periodik kali tren linear suatu proses Poisson non-homogen.

Tujuan

Tujuan penulisan karya ilmiah ini adalah untuk:

(i) Menentukan perumusan penduga komponen periodik fungsi intensitas yang berbentuk fungsi periodik kali tren linear suatu proses Poisson non-homogen serta membuktikan kekonsistenan penduganya.
(ii) Menentukan aproksimasi asimtotik bagi bias penduga.
(iii) Menentukan aproksimasi asimtotik bagi ragam penduga.
(iv) Menentukan aproksimasi asimtotik bagi *MSE* penduga.
(v) Menentukan *bandwidth* optimal asimtotik untuk penduga yang dikaji.

PERUMUSAN PENDUGA

Perumusan Masalah

Misalkan N adalah proses Poisson non-homogen pada interval $[0,\infty)$ dengan fungsi intensitas λ yang tidak diketahui. Fungsi intensitas λ diasumsikan terintegralkan lokal dan merupakan hasil kali dari dua komponen yaitu komponen periodik atau komponen siklik λ_c dengan periode τ (diketahui) dikalikan komponen tren linear as. Konstanta a merupakan kemiringan dari tren linear dimana $a > 0$. Dengan demikian, untuk sebarang titik $s \in [0,\infty)$, fungsi intensitas $\lambda(s)$ dapat dinyatakan sebagai berikut

$$\lambda(s) = \left(\lambda_c^*(s)\right)as \tag{1}$$

dengan $\lambda^*{}_c(s)$ adalah fungsi periodik dengan periode τ. Persamaan (1) juga dapat ditulis menjadi

$$\lambda(s) = s\left(a\lambda^*_c(s)\right) \tag{2}$$

dengan $a\lambda^*_c(s)$ adalah fungsi periodik. Misalkan $\lambda_c(s) = a\lambda^*_c(s)$, maka persamaan (1) dapat ditulis menjadi

$$\lambda(s) = s\left(\lambda_c(s)\right). \tag{3}$$

Karena λ^*_c adalah fungsi periodik dengan periode τ dan $a > 0$ adalah konstanta, maka λ_c adalah fungsi periodik dengan periode τ sehingga persamaan

$$\lambda_c(s + k\tau) = \lambda_c(s) \tag{4}$$

berlaku untuk setiap $s \in [0, \infty)$ dan $k \in \mathbb{Z}$, dengan $\mathbb{Z}$ adalah himpunan bilangan bulat. Berdasarkan persamaan (3), untuk menduga $\lambda(s)$ cukup diduga $\lambda_c(s)$. Karena $\lambda_c(s)$ adalah fungsi periodik dengan periode τ, maka untuk menduga $\lambda_c(s)$ pada $s \in [0, \infty)$ cukup diduga nilai $\lambda_c(s)$ pada $s \in [0, \tau)$.

Tujuan dari penulisan karya ilmiah ini adalah mempelajari penyusunan penduga konsisten bagi $\lambda_c(s)$ untuk $s \in [0, \tau)$ dengan menggunakan realisasi tunggal $N(\omega)$ dari proses Poisson yang diamati pada interval $[0, n]$.

Diasumsikan bahwa s adalah titik Lebesque dari λ, yang secara otomatis berarti bahwa s adalah titik Lebesque dari λ_c.

Perumusan Penduga

Penduga bagi $\lambda_c(s)$ pada titik $s \in [0, \tau)$ dapat dirumuskan sebagai berikut

$$\hat{\lambda}_{c,n}(s) = \frac{\tau}{n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(s + k\tau)} \frac{N\left([s + k\tau - h_n, s + k\tau + h_n] \cap [0, n]\right)}{2h_n} \tag{5}$$

dengan $N([0, n])$ menyatakan banyak kejadian pada interval $[0, n]$, k merupakan suatu bilangan bulat dan h_n adalah barisan bilangan *real* positif yang konvergen menuju nol yaitu

$$h_n \downarrow 0 \tag{6}$$

untuk $n \to \infty$. Pada penduga di atas h_n disebut *bandwidth.*

Berikut diuraikan ide tentang pembentukan dari penduga $\hat{\lambda}_{c,n}(s)$ bagi $\lambda_c(s)$. Menurut persamaan (3) dan (4) diperoleh

$$\lambda_c(s) = \lambda_c(s + k\tau) = \frac{\lambda(s + k\tau)}{(s + k\tau)}. \tag{7}$$

Maka rata-rata nilai yang diduga:

$$\lambda_c(s) = \frac{1}{n_\tau} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda(s + k\tau)}{(s + k\tau)} \tag{8}$$

dengan $n_\tau = \left[\frac{n}{\tau}\right]$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan $\frac{n}{\tau}$. Dari persamaan (8) diperoleh

$$\begin{aligned}\lambda_c(s) &= \frac{1}{n_\tau}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda(s+k\tau)}{(s+k\tau)} \\ &= \frac{1}{n_\tau}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(s+k\tau)}\lambda(s+k\tau).\end{aligned} \tag{9}$$

Untuk melakukan pendekatan terhadap persamaan (9) diperlukan asumsi bahwa s adalah titik Lebesque bagi λ_c dan asumsi (6) terpenuhi, sehingga persamaan (9) menjadi

$$\begin{aligned}\lambda_c(s) &= \frac{1}{n_\tau}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(s+k\tau)}\lambda(s+k\tau) \\ &\approx \frac{1}{n_\tau}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(s+k\tau)}\frac{1}{\left|[s+k\tau-h_n, s+k\tau+h_n]\right|}\int_{s+k\tau-h_n}^{s+k\tau+h_n}\lambda(x)\,\mathrm{I}(x\in[0,n])\,dx \\ &= \frac{1}{n_\tau}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(s+k\tau)}\frac{\mathrm{E}N([s+k\tau-h_n, s+k\tau+h_n]\cap[0,n])}{2h_n}.\end{aligned}$$

Dengan mengganti

$$\mathrm{E}N([s+k\tau-h_n, s+k\tau+h_n]\cap[0,n]) = N([s+k\tau-h_n, s+k\tau+h_n]\cap[0,n])$$

yang merupakan padanan stokastiknya, maka dapat diaproksimasi

$$\lambda_c(s) \approx \frac{1}{n_\tau}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(s+k\tau)}\frac{N([s+k\tau-h_n, s+k\tau+h_n]\cap[0,n])}{2h_n}.$$

Sehingga diperoleh penduga bagi $\lambda_c(s)$ adalah

$$\hat{\lambda}_{c,n}(s) = \frac{\tau}{n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2h_n(s+k\tau)}N([s+k\tau-h_n, s+k\tau+h_n]\cap[o,n]),$$

seperti pada persamaan (5).

KEKONVERGENAN MSE PENDUGA

Teorema 1 (Kekonvergenan *MSE* penduga). *Misalkan fungsi intensitas* λ *memenuhi persamaan* (3) *dan terintegralkan lokal. Jika asumsi* (6) *dipenuhi dan* $nh_n \to \infty$, *maka*

$$MSE\left(\hat{\lambda}_{c,n}(s)\right) \to 0 \tag{10}$$

untuk $n \to \infty$, *asalkan s adalah titik Lebesgue bagi* λ_c.

Bukti. Berdasarkan definisi *MSE*, Teorema 1 merupakan akibat dari dua lema berikut, yaitu Lema 1 mengenai ketakbiasan asimtotik dan Lema 2 mengenai kekonvergenan ragam.

Lema 1 (Ketakbiasan asimtotik). *Misalkan fungsi intensitas* λ *memenuhi persamaan* (3) *dan terintegralkan lokal. Jika asumsi* (6) *dipenuhi maka*

$$\mathrm{E}\left(\hat{\lambda}_{c,n}(s)\right) \to \lambda_c(s) \tag{11}$$

untuk $n \to \infty$, asalkan s adalah titik Lebesgue bagi λ_c. Dengan kata lain $\hat{\lambda}_{c,n}(s)$ adalah penduga tak bias asimtotik bagi $\lambda_c(s)$.

Bukti. Untuk membuktikan persamaan (11) akan diperlihatkan bahwa

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}\left(\hat{\lambda}_{c,n}(s)\right) = \lambda_c(s). \tag{12}$$

Untuk menyelesaikan persamaan (12) dapat diperoleh dengan cara sebagai berikut

$$\mathrm{E}\left(\hat{\lambda}_{c,n}(s)\right) = \frac{\tau}{n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2h_n(s+k\tau)}\mathrm{E}N([s+k\tau-h_n, s+k\tau+h_n]\cap[0,n]). \tag{13}$$

Karena $\frac{1}{2h_n}$ tidak mengandung indeks k, maka persamaan (13) dapat ditulis menjadi

$$\mathrm{E}\left(\hat{\lambda}_{c,n}(s)\right) = \frac{\tau}{2nh_n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(s+k\tau)}\mathrm{E}N([s+k\tau-h_n, s+k\tau+h_n]\cap[0,n]) \cdot \tag{14}$$

Nilai harapan $\mathrm{E}N([s+k\tau-h_n, s+k\tau+h_n])$ pada persamaan (14) dapat diuraikan menjadi

$$\mathrm{E}N([s+k\tau-h_n, s+k\tau+h_n]\cap[0,n]) = \int_{s+k\tau-h_n}^{s+k\tau+h_n}\lambda(x)I(x\in[0,n])dx. \tag{15}$$

Misalkan

$$y = x-(s+k\tau),$$
$$dy = dx,$$
$$x = y+s+k\tau.$$

Maka pada persamaan (15) dilakukan pergantian peubah sehingga diperoleh

$$\mathrm{E}N([s+k\tau-h_n, s+k\tau+h_n]\cap[0,n]) = \int_{-h_n}^{h_n}\lambda(y+s+k\tau)I(y+s+k\tau\in[0,n])dy. \tag{16}$$

Dengan berpedoman pada persamaan (7), maka persamaan (16) dapat diubah menjadi

$$\mathrm{E}N([s+k\tau-h_n, s+k\tau+h_n]\cap[0,n]) = \int_{-h_n}^{h_n}\lambda_c(y+s+k\tau)(y+s+k\tau)I(y+s+k\tau\in[0,n])dy. \tag{17}$$

Berdasarkan sifat keperiodikan pada persamaan (4), maka persamaan (17) dapat ditulis menjadi

$$\mathrm{E}N([s+k\tau-h_n, s+k\tau+h_n]\cap[0,n]) = \int_{-h_n}^{h_n}\lambda_c(y+s)(y+s+k\tau)I(y+s+k\tau\in[0,n])dy. \tag{18}$$

Kemudian persamaan (18) disubstitusikan kembali ke persamaan (14) sehingga diperoleh

$$\mathrm{E}\left(\hat{\lambda}_{c,n}(s)\right) = \frac{\tau}{2nh_n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(s+k\tau)}\int_{-h_n}^{h_n}\lambda_c(y+s)(y+s+k\tau)I(y+s+k\tau\in[0,n])\,dy.$$

Lalu unsur yang memiliki indeks k dikelompokkan sehingga diperoleh

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(y+s+k\tau)}{(s+k\tau)} \mathrm{I}(y+s+k\tau \in [0,n]) = \frac{n}{\tau} + O(1) \tag{19}$$

Karena $y = O(h_n) \downarrow 0$, jika $n \to \infty$, maka

$$\mathrm{E}\left(\hat{\lambda}_{c,n}(s)\right) = \frac{\tau}{n}\left(\frac{1}{2h_n}\right)\int_{-h_n}^{h_n} \lambda_c(y+s) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(y+s+k\tau)}{(s+k\tau)} I(y+s+k\tau \in [0,n])\, dy. \tag{20}$$

untuk semua $y \in [-h_n, h_n]$. Dari persamaan (20), maka persamaan (19) dapat ditulis sebagai

$$\mathrm{E}\left(\hat{\lambda}_{c,n}(s)\right) = \frac{\tau}{n}\left(\frac{1}{2h_n}\int_{-h_n}^{h_n} \lambda_c(y+s)\left(\frac{n}{\tau} + O(1)\right)\right) dy. \tag{21}$$

Dengan melakukan operasi perkalian pada ruas kanan, maka diperoleh

$$\mathrm{E}\left(\hat{\lambda}_{c,n}(s)\right) = \frac{1}{2h_n}\int_{-h_n}^{h_n} \lambda_c(y+s)\, dy + \left(O\left(\frac{1}{n}\right)\right)\frac{1}{2h_n}\int_{-h_n}^{h_n} \lambda_c(y+s)\, dy. \tag{22}$$

Suku pertama pada ruas kanan dari persamaan (22) dapat ditulis menjadi

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2h_n}\int_{-h_n}^{h_n} \left(\lambda_c(y+s) - \lambda_c(s) + \lambda_c(s)\right) dy \\ &= \frac{1}{2h_n}\int_{-h_n}^{h_n} \left(\lambda_c(y+s) - \lambda_c(s)\right) dy + \frac{1}{2h_n}\int_{-h_n}^{h_n} \lambda_c(s)\, dy. \end{aligned} \tag{23}$$

Untuk menunjukkan bahwa suku pertama dari persamaan (23) adalah konvergen ke nol, akan digunakan nilai yang lebih besar, yaitu

$$\frac{1}{2h_n}\int_{-h_n}^{h_n} \left|\left(\lambda_c(y+s) - \lambda_c(s)\right)\right| dy. \tag{24}$$

Berdasarkan asumsi (6) dan dengan asumsi bahwa s adalah titik Lebesgue bagi λ_c, maka kuantitas pada persamaan (24) konvergen ke nol, jika $n \to \infty$, atau dapat juga ditulis $o(1)$. Sedangkan suku kedua persamaan (23) adalah

$$\begin{aligned} \int_{-h_n}^{h_n} \frac{1}{2h_n}\lambda_c(s)dy &= \lambda_c(s)\frac{1}{2h_n}\int_{-h_n}^{h_n} dy \\ &= \lambda_c(s)\frac{1}{2h_n}[y]_{-h_n}^{h_n} \\ &= \lambda_c(s)\frac{1}{2h_n}(2h_n) \\ &= \lambda_c(s). \end{aligned}$$

Dengan menggabungkan hasil yang diperoleh, maka

$$\frac{1}{2h_n}\int_{-h_n}^{h_n} \left(\lambda_c(y+s) - \lambda_c(s)\right) dy + \frac{1}{2h_n}\int_{-h_n}^{h_n} \lambda_c(s)\, dy = \lambda_c(s) + o(1),$$

jika $n \to \infty$. Dengan demikian, diperoleh bahwa suku pertama pada ruas kanan persamaan (22) adalah

$$\frac{1}{2h_n}\int_{-h_n}^{h_n} \lambda_c(y+s)\,dy = \lambda_c(s)+o(1) \tag{25}$$

untuk $n \to \infty$. Sedangkan suku kedua pada ruas kanan persamaan (22) menjadi

$$\begin{aligned}\left(O\left(\frac{1}{n}\right)\right)\frac{1}{2h_n}\int_{-h_n}^{h_n} \lambda_c(y+s)\,dy &= O\left(\frac{1}{n}\right)\left(\lambda_c(s)+o(1)\right)\\ &= O\left(\frac{1}{n}\right)\\ &= o(1),\end{aligned}$$

untuk $n \to \infty$.

Dengan mensubstitusikan hasil yang diperoleh dari suku pertama dan suku kedua di atas maka diperoleh

$$E\left(\hat{\lambda}_{c,n}(s)\right) = \lambda_c(s)+o(1) \tag{26}$$

untuk $n \to \infty$. Dengan demikian Lema 1 terbukti.

Lema 2 (Kekonvergenan ragam). *Misalkan fungsi intensitas λ memenuhi persamaan* (3) *dan terintegralkan lokal. Jika asumsi* (6) *dipenuhi, λ_c terbatas di sekitar s dan $nh_n \to \infty$, maka*

$$Var\left(\hat{\lambda}_{c,n}(s)\right) \to 0 \tag{27}$$

untuk $n \to \infty$.

Bukti. Karena $h_n \downarrow 0$ jika $n \to \infty$, maka untuk nilai n yang cukup besar, interval $[s+k\tau-h_n, s+k\tau+h_n]$ dan $[s+j\tau-h_n, s+j\tau+h_n]$ untuk $k \neq j$ tidak tumpang tindih atau tidak *overlap*. Akibatnya, berdasarkan sifat inkremen bebas dari proses Poisson (Definisi (25), diperoleh bahwa $N(s+k\tau-h_n, s+k\tau+h_n)$ dan $N(s+j\tau-h_n, s+j\tau+h_n)$ untuk $k \neq j$ adalah peubah acak bebas. Sehingga $Var(\hat{\lambda}_{c,n}(s))$ dapat ditentukan sebagai berikut

$$\begin{aligned}Var\left(\hat{\lambda}_{c,n}(s)\right) &= \frac{\tau^2}{n^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{4h_n^2(s+k\tau)^2} Var\left(N\left([s+k\tau-h_n, s+k\tau+h_n]\cap[0,n]\right)\right)\\ &= \frac{\tau^2}{4n^2h_n^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(s+k\tau)^2}\; Var(N[s+k\tau-h_n, s+k\tau+h_n]\cap[0,n]).\end{aligned} \tag{28}$$

Karena $N[s+k\tau-h_n, s+k\tau+h_n]\cap[0,n] \sim$ Poisson, maka $Var(N) = \mathrm{E}N$ sehingga persamaan (28) menjadi

$$Var\left(\hat{\lambda}_{c,n}(s)\right) = \frac{\tau^2}{4n^2h_n^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(s+k\tau)^2}\mathrm{E}N([s+k\tau-h_n, s+k\tau+h_n])\cap[0,n]). \tag{29}$$

Dari persamaan (18) untuk sebarang k, kita bisa tuliskan

$$\mathrm{E}N([s+k\tau-h_n, s+k\tau+h_n]\cap[0,n]) = \int_{-h_n}^{h_n} \lambda_c(y+s)(y+s+k\tau)I(y+s+k\tau\in[0,n])\,dy.$$

Dengan demikian persamaan (29) dapat ditulis menjadi

$$Var\left(\hat{\lambda}_{c,n}(s)\right) = \frac{\tau^2}{4n^2h_n^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(s+k\tau)^2}\int_{-h_n}^{h_n}\lambda_c(y+s)(y+s+k\tau)I(y+s+k\tau\in[0,n])dy. \quad (30)$$

Dengan mengelompokan unsur yang memiliki indeks k, persamaan (30) dapat ditulis menjadi

$$Var\left(\hat{\lambda}_{c,n}(s)\right) = \frac{\tau^2}{2n^2h_n}\left(\frac{1}{2h_n}\right)\int_{-h_n}^{h_n}\lambda_c(y+s)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(y+s+k\tau)}{(s+k\tau)^2}I(y+s+k\tau\in[0,n])\,dy \quad (31)$$

Perhatikan bahwa, karena

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(y+s+k\tau)}{(s+k\tau)^2}I\left(y+s+k\tau\in[0,n]\right) = \ln(n)+O(1), \quad (32)$$

maka persamaan (31) menjadi

$$Var\left(\hat{\lambda}_{c,n}(s)\right) = \frac{\tau^2}{2n^2h_n}\left(\frac{1}{2h_n}\right)\int_{-h_n}^{h_n}\lambda_c(y+s)\left(\ln(n)+O(1)\right)dy. \quad (33)$$

Karena λ_c terbatas di sekitar s, maka ada konstanta K sehingga $\lambda^*{}_c \leq \mathrm{K}$ untuk semua $x \in [s-h_n, s+h_n]$. Maka ruas kanan persamaan (33) tidak melebihi

$$\frac{\tau^2}{2n^2h_n}\left(\frac{1}{2h_n}\int_{-h_n}^{h_n}\mathrm{K}(\ln(\mathrm{n})+O(1))\right)dy = \frac{\tau^2\mathrm{K}ln(n)}{2n^2h_n}+o\left(\frac{1}{n^2h_n}\right)$$
$$= \frac{\tau^2\mathrm{K}\ln(n)}{2n}\frac{1}{nh_n}+o\left(\frac{1}{n^2h_n}\right)\to 0$$

jika $n\to\infty$. Dengan demikian Lema 2 terbukti.

Berdasarkan kedua lema tersebut, yaitu

(i) Lema 1 (ketakbiasan asimtotik)

$\mathrm{E}\left(\hat{\lambda}_{c,n}(s)\right)\to\lambda_c(s)$, jika $n\to\infty$, maka

$\mathrm{E}\left(\hat{\lambda}_{c,n}(s)\right)-\lambda_c(s)\to 0$

(ii) Lema 2 (kekonvergenan ragam)

$Var\left(\hat{\lambda}_{c,n}(s)\right)\to 0$, jika $n\to\infty$,

maka definisi *MSE* akan diperoleh, yaitu sebagai berikut

$$MSE\left(\hat{\lambda}_{c,n}(s)\right) = Var\left(\hat{\lambda}_{c,n}(s)\right)+\left(Bias\hat{\lambda}_{c,n}(s)\right)^2\to 0$$

untuk $n\to\infty$. Dengan demikian Teorema 1 terbukti.

APROKSIMASI ASIMTOTIK BAGI BIAS, RAGAM DAN MSE PENDUGA

Teorema 2 (Aproksimasi asimtotik bagi bias). *Misalkan fungsi intensitas λ memenuhi persamaan (3) dan terintegralkan lokal. Jika asumsi (6) dipenuhi, $nh_n^2 \to \infty$ dan λ_c memiliki turunan kedua λ_c'' berhingga pada s, maka*

$$\mathrm{E}\left(\hat{\lambda}_{c,n}(s)\right) = \lambda_c(s) + \frac{\lambda_c''(s)}{6} h_n^2 + o\left(h_n^2\right) \tag{34}$$

untuk $n \to \infty$.

Bukti. Berdasarkan bukti Lema 1 mengenai ketakbiasan asimtotik, maka nilai harapan dari $\hat{\lambda}_{c,n}(s)$ dapat dituliskan sebagai berikut

$$\mathrm{E}\left(\hat{\lambda}_{c,n}(s)\right) = \frac{\tau}{n}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2h_n(s+k\tau)} EN([s+k\tau-h_n, s+k\tau+h_n]\cap[0,n]).$$

Berdasarkan persamaan (19), maka diperoleh

$$E\left(\hat{\lambda}_{c,n}(s)\right) = \frac{\tau}{n}\left(\frac{1}{2h_n}\right)\int_{-h_n}^{h_n} \lambda_c(y+s) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(y+s+k\tau)}{(s+k\tau)} I(y+s+k\tau \in [0,n])dy. \tag{35}$$

Diperlukan asumsi λ_c memiliki turunan yang terhingga di s maka λ_c'' ada dan kontinu pada *s*, mengakibatkan λ_c memiliki nilai yang terbatas di sekitar *s*. Dengan Formula Young (Lema 2), maka diperoleh

$$\lambda_c(x) = \lambda_c(s) + \sum_{k=0}^{2} \frac{\lambda_c^{(k)}(s)}{k!}(x-s)^k + o\left(|x-s|^2\right)$$

untuk $x \to s$, atau bila diuraikan menjadi

$$\lambda_c(x) = \lambda_c(s) + \frac{\lambda_c'(s)}{1!}(x-s) + \frac{\lambda_c''(s)}{2!}(x-s)^2 + o\left(|x-s|^2\right) \tag{36}$$

untuk $x \to s$.

Misalkan $x = y + s$, maka persamaan (36) dapat ditulis menjadi

$$\lambda_c(y+s) = \lambda_c(s) + \frac{\lambda_c'(s)}{1!}(y) + \frac{\lambda_c''(s)}{2!}(y)^2 + o\left(y^2\right)$$

untuk $x \to 0$. Sehingga dapat dinyatakan

$$\frac{1}{2h_n}\int_{-h_n}^{h_n} \lambda_c(y+s)dy = \frac{1}{2h_n}\int_{-h_n}^{h_n}\left(\lambda_c(s) + \frac{\lambda_c'(s)}{1!}(y) + \frac{\lambda_c''(s)}{2!}(y)^2 + o\left(y^2\right)\right)dy$$

$$= \frac{1}{2h_n}\int_{-h_n}^{h_n} \lambda_c(s) + \frac{1}{2h_n}\int_{-h_n}^{h_n} \lambda_c'(s)\, y\, dy + \frac{1}{2h_n}\int_{-h_n}^{h_n} \frac{\lambda_c''(s)}{4} y^2 dy + \frac{1}{2h_n}\int_{-h_n}^{h_n} o\left(y^2\right)dy$$

$$= \lambda_c(s) + \frac{\lambda_c'(s)}{2h_n}\left(\frac{1}{2}y^2\right]_{-h_n}^{h_n}\right) + \frac{\lambda_c''(s)}{4h_n}\left(\frac{1}{3}y^3\right]_{-h_n}^{h_n}\right) + o(h_n^2)$$

$$\frac{1}{2h_n}\int_{-h_n}^{h_n}\lambda_c(y+s)\,dy = \lambda_c(s) + \frac{\lambda_c'(s)}{2h_n}\left(\frac{1}{2}\left(h_n^2 - h_n^2\right)\right) + \frac{\lambda_c''(s)}{4h_n}\left(\frac{1}{3}\left(h_n^3 + h_n^3\right)\right) + o(h_n^2)$$

$$= \lambda_c(s) + \frac{\lambda_c''(s)}{4h_n}\left(\frac{2}{3}h_n^3\right) + o(h_n^2)$$

$$= \lambda_c(s) + \frac{\lambda_c''(s)}{6}h_n^2 + o\left(h_n^2\right)$$

untuk $n \to \infty$. Karena menurut persamaan (20)

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(y+s+k\tau)}{(s+k\tau)}\,\mathrm{I}(y+s+k\tau\in[0,n]) = \frac{n}{\tau} + O(1)$$

maka persamaan (35) akan menjadi

$$E\left(\hat{\lambda}_{c,n}(s)\right) = \frac{\tau}{n}\left(\lambda_c(s) + \frac{\lambda_c''(s)}{6}h_n^2 + o\left(h_n^2\right)\right)\left(\frac{n}{\tau} + O(1)\right)$$

$$= \left(\lambda_c(s) + \frac{\lambda_c''(s)}{6}h_n^2 + o\left(h_n^2\right)\right)\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$= \left(\lambda_c(s) + \frac{\lambda_c''(s)}{6}h_n^2 + o\left(h_n^2\right)\right) + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$= \lambda_c(s) + \frac{\lambda_c''(s)}{6}h_n^2 + o\left(h_n^2\right)$$

untuk $n \to \infty$. Dengan demikian Teorema 2 terbukti.

Teorema 3 (Aproksimasi asimtotik bagi ragam). *Misalkan fungsi intensitas* λ *memenuhi persamaan* (3) *dan terintegralkan lokal. Jika asumsi* (6) *dipenuhi,* λ_c *terbatas di sekitar s dan* $nh_n \to \infty$, *maka*

$$Var\left(\hat{\lambda}_{c,n}(s)\right) = \frac{\tau^2\lambda_c(s)\ln(n)}{2n^2h_n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n^2h_n}\right)$$

untuk $n \to \infty$.

Bukti. Berdasarkan bukti dari Lema 5 (kekonvergenan ragam), maka ragam dari $\hat{\lambda}_{c,n}(s)$ dapat ditulis seperti pada persamaan (31)

$$Var\left(\hat{\lambda}_{c,n}(s)\right) = \frac{\tau^2}{2n^2h_n}\left(\frac{1}{2h_n}\right)\int_{-h_n}^{h_n}\lambda_c(y+s)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(y+s+k\tau)}{(s+k\tau)^2}I(y+s+k\tau\in[0,n])\,dy \qquad (31)$$

Perhatikan persamaan (32)

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(y+s+k\tau)}{(s+k\tau)^2}I\left(y+s+k\tau\in[0,n]\right) = \ln(n) + O(1). \qquad (32)$$

Maka persamaan (31) menjadi

$$Var\left(\hat{\lambda}_{c,n}(s)\right)=\frac{\tau^2}{2n^2h_n}\left(\frac{1}{2h_n}\right)\int_{-h_n}^{h_n}\lambda_c(y+s)\left(\ln(n)+O(1)\right)dy. \tag{33}$$

Dari persamaan (33) kita mempunyai

$$\begin{aligned}\frac{1}{2h_n}\int_{-h_n}^{h_n}\lambda_c(y+s)\,dy &= \frac{1}{2h_n}\int_{-h_n}^{h_n}\left(\lambda_c(y+s)-\lambda_c(s)+\lambda_c(s)\right)dy\\ &= \frac{1}{2h_n}\int_{-h_n}^{h_n}\left(\lambda_c(y+s)-\lambda_c(s)\right)dy+\frac{1}{2h_n}\int_{-h_n}^{h_n}\lambda_c(s)dy.\end{aligned} \tag{38}$$

Untuk menunjukkan bahwa suku pertama dari persamaan (38) adalah konvergen ke nol, akan digunakan nilai yang lebih besar, yaitu

$$\frac{1}{2h_n}\int_{-h_n}^{h_n}\left|\lambda_c(y+s)-\lambda_c(s)\right|dy. \tag{39}$$

Berdasarkan asumsi (6) dan dengan asumsi bahwa s adalah titik Lebesgue bagi λ_c, maka kuantitas pada (39) akan menuju nol jika $n\to\infty$, atau dapat juga ditulis $o(1)$. Sedangkan suku kedua persamaan (38) adalah

$$\frac{1}{2h_n}\int_{-h_n}^{h_n}\lambda_c(s)\,dy=\lambda_c(s).$$

Dengan menggabungkan hasil yang diperoleh, maka

$$\frac{1}{2h_n}\int_{-h_n}^{h_n}\lambda_c(y+s)\,dy=\lambda_c(s)+o(1).$$

Dengan demikian menurut persamaan (25) maka persamaan (33) dapat ditulis menjadi

$$\begin{aligned}Var\left(\hat{\lambda}_{c,n}(s)\right)&=\frac{\tau^2}{2n^2h_n}\left(\lambda_c(s)+o(1)\right)\left(\ln(n)+O(1)\right)\\ &=\left(\frac{\tau^2\lambda_c(s)}{2n^2h_n}+o\left(\frac{1}{n^2h_n}\right)\right)\left(\ln(n)+O(1)\right)\\ &=\frac{\tau^2\lambda_c(s)\ln(n)}{2n^2h_n}+o\left(\frac{\ln(n)}{n^2h_n}\right)\end{aligned} \tag{40}$$

untuk $n\to\infty$. Dengan demikian Terorema 3 terbukti.

Teorema 4 (Aproksimasi asimtotik bagi *MSE*). *Misalkan fungsi intensitas* λ *memenuhi persamaan* (3) *dan terintegralkan lokal. Jika asumsi* (6) *dipenuhi bagi* λ_c *dan memiliki turunan kedua* λ_c'' *berhingga pada s, maka*

$$MSE\left(\hat{\lambda}_{c,n}(s)\right)=\frac{\tau^2\lambda_c(s)}{2n^2h_n}+\frac{\left(\lambda_c''(s)\right)^2}{36}h_n^4+o\left(\frac{1}{n^2h_n}\right)+o\left(h_n^4\right) \tag{41}$$

untuk $n\to\infty$.

Bukti. Berdasarkan definisi *MSE*, maka

$$MSE\left(\hat{\lambda}_{c,n}(s)\right)=Var\left(\hat{\lambda}_{c,n}(s)\right)+\left(bias\ \hat{\lambda}_{c,n}(s)\right)^2 \tag{42}$$

dengan $bias\ \hat{\lambda}_{c,n}(s)=E\left(\hat{\lambda}_{c,n}(s)\right)-\lambda_c(s)$. Pada persamaan (34) diperoleh

$$\mathrm{E}\left(\hat{\lambda}_{c,n}(s)\right)=\lambda_c(s)+\frac{\lambda_c''(s)}{6}h_n^{\,2}+o(h_n^{\,2})$$

$$bias\ \hat{\lambda}_{c,n}(s)=\lambda_c(s)+\frac{\lambda_c''(s)}{6}h_n^2+o\left(h_n^2\right)-\lambda_c(s)$$

$$=\frac{\lambda_c''(s)}{6}h_n^2+o\left(h_n^2\right)$$

Berdasarkan Teorema 3 diperoleh

$$Var\left(\hat{\lambda}_{c,n}(s)\right)=\frac{\tau^2\lambda_c(s)\ln(n)}{2n^2h_n}+o\left(\frac{\ln(n)}{n^2h_n}\right).$$

Sehingga ruas kanan (42) dapat ditulis menjadi

$$\begin{aligned}MSE\left(\hat{\lambda}_{c,n}(s)\right)&=\frac{\tau^2\lambda_c(s)\ln(n)}{2n^2h_n}+o\left(\frac{\ln(n)}{n^2h_n}\right)+\left(\frac{\lambda_c''(s)}{6}h_n^2+o\left(h_n^2\right)\right)^2\\&=\frac{\tau^2\lambda_c(s)\ln(n)}{2n^2h_n}+\frac{\left(\lambda_c''(s)\right)^2}{36}h_n^4+o\left(\frac{\ln(n)}{n^2h_n}\right)+\frac{\lambda_c''(s)}{3}h_n^2o\left(h_n^2\right)+o\left(h_n^4\right)\end{aligned} \tag{43}$$

untuk $n\to\infty$. Karena λ_c mempunyai turunan kedua λ_c'' berhingga pada s, maka $\frac{\lambda_c''(s)}{3}=O(1)$, akibatnya suku kedua pada ruas kanan persamaan (43) bernilai $o\left(h_n^4\right)$ untuk $n\to\infty$, sehingga diperoleh persamaan (37). Dengan demikian Teorema 4 terbukti.

PENENTUAN *BANDWIDTH* OPTIMAL ASIMTOTIK

Ukuran terbaik dari suatu penduga relatif terhadap kesalahannya adalah penduga dengan *MSE* yang bernilai minimum. Misalkan $M(h_n)$ yang merupakan fungsi dari h_n, menyatakan suku utama dari $MSE\left(\hat{\lambda}_{c,n}(s)\right)$, yaitu

$$M\left(h_n\right)=\frac{\tau^2\lambda_c(s)\ln(n)}{2n^2h_n}+\frac{\left(\lambda_c''(s)\right)^2}{36}h_n^4.$$

Dapat diperoleh nilai h_n yang meminimumkan $M(h_n)$ untuk n tetap, dengan membuat turunan pertama $M(h_n)$ sama dengan nol, sehingga diperoleh

$$M'(h_n)=0$$
$$\Leftrightarrow -\frac{\tau^2\lambda_c(s)\ln(n)}{2n^2h_n^2}+\frac{(\lambda_c''(s))^2}{9}h_n^3=0$$
$$\Leftrightarrow \frac{(\lambda_c''(s))^2\ln(n)}{9}h_n^3=\frac{\tau^2\lambda_c(s)}{2n^2h_n^2}$$
$$\Leftrightarrow \frac{(\lambda_c''(s))^2\ln(n)}{9}h_n^5=\frac{\tau^2\lambda_c(s)}{2n^2}$$
$$\Leftrightarrow h_n^5=\frac{9\tau^2\lambda_c(s)\ln(n)}{2n^2(\lambda_c''(s))^2}$$
$$\Leftrightarrow h_n=\sqrt[5]{\frac{9\tau^2\lambda_c(s)\ln(n)}{2n^2(\lambda_c''(s))^2}}$$
$$\Leftrightarrow h_n=\sqrt[5]{\frac{9\tau^2\lambda_c(s)}{2(\lambda_c''(s))^2}}\left(\frac{n^2}{\ln(n)}\right)^{-\frac{1}{5}}$$

Selanjutnya akan diperiksa apakah h_n yang diperoleh meminimumkan $M(h_n)$ dengan memeriksa turunan kedua $M(h_n)$, yaitu

$$M''(h_n)=\frac{\tau^2\lambda_c(s)\ln(n)}{n^2h_n^3}+\frac{(\lambda_c''(s))^2}{3}h_n^2.$$

Telah kita ketahui bahwa nilai dari $\tau>0$, $\lambda_c(s)>0$, $(\lambda_c''(s))>0$, $n^2>0$, dan h_n adalah *bandwidth* yang bernilai positif, sehingga $M''(h_n)>0.$

Dengan demikian, h_n yang diperoleh meminimumkan $M(h_n)$. Sehingga nilai *bandwidth* yang optimal adalah

$$h_n^*=\sqrt[5]{\frac{9\tau^2\lambda_c(s)}{2(\lambda_c''(s))^2}}\left(\frac{n^2}{\ln(n)}\right)^{-\frac{1}{5}}.$$

Turunan pertama sama dengan nol $(M'(h_n)=0)$ dan turunan kedua bernilai positif $(M''(h_n)>0)$ maka memenuhi syarat minimum. Karena $\lambda_c''(s)$ tidak diketahui, sehingga *bandwidth* di atas bersifat asimtotik.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Browder A. 1996. *Mathematical Analysis: An Introduction*. Springer. New York.
[2] Casella G, Berger RL. 1990. *Statistical Inference*. Ed. ke-1. Wadsworth & Brooks/Cole. Pasivic Grove. California.
[3] Cressie NA. C.1993. *Statistic for Spotial Data.Revised Edition*. Wiley. New York.
[4] Dudley RM. 1989. *Real Analysis and Probability*. Wadsworth & Brooks. California.
[5] Grimmett GR, Stirzaker DR. 1992. *Probability and Random Processes*. Ed. ke-2. Clarendon Press. Oxford.

[6] Hogg RV, Graig AT, MacKean, JW.1995. *Introduction to Mathematical Statistic.* Ed. ke-6. Prentice Hall, Englewood Cliffs. New Jersey.
[7] Mangku IW. 2001. *Estimating the Intensity of a Cyclic Poisson Process* (Ph.D.Thesis). University of Amsterdam. Amsterdam.
[8] Ross SM. 2007. *Introduction to Probability Model.* Ed. ke-9. Academic Press Inc. Orlando. Florida.
[9] Serfling RJ. 1980. *Approximation Theorems of Mathematical Statistic.* John Wiley & Sons. New York.
[10] Taylor HM, Karlin S. 1984. *An Introduction to Stochastics Modelling.* Academic Press Inc. Orlando. Florida.
[11] Wheeden RL, Zygmund A. 1977. *Measure and Integral: An Introduction to Real Analysis.* Marcel Dekker, Inc. New York.