SYARAT ADANYA KETERKAITAN ANTARA RING EXCHANGE DAN RING QB

SISWANDI[1]

Abstrak

Dalam teori ring ada berbagai macam klas dari ring yang merupakan akibat dari diberikannya aksioma-aksioma baru. Di antara klas-klas ring tersebut, dikenal adanya ring Exchange dan ring QB. Dalam tulisan ini akan dibahas syarat yang harus dipenuhi agar ada keterkaitan antara ring Exchange dan ring QB.

Kata kunci: ring Exchange, ring QB, elemen regular Von Neumann.

1 PENDAHULUAN

Suatu himpunan takkosong R yang dikenai dua operasi biner di dalamnya yaitu: operasi penjumlahan $+: R\times R \to R$ dengan $+(a,b) = a+b \in R$ dan operasi perkalian $\cdot : R\times R \to R$ dengan $\cdot(a,b) = a\cdot b$ (selanjutnya ditulis ab) untuk setiap $a, b \in R$ dan memenuhi aksioma-aksioma: $(R,+)$ suatu grup abelian, terhadap operasi pergandaan skalar bersifat asosiatif, dan terhadap operasi penjumlahan dan perkalian bersifat distributif kiri, dan bersifat distributif kanan, disebut Ring, dan ditulis ring $(R,+,\cdot)$ atau disingkat ring R.

Pada perkembangan selanjutnya, muncul/diperkenalkan bermacam-macam klas dari ring. Klas-klas dari ring tersebut muncul akibat diberlakukannya aksioma-aksioma tambahan selain ketiga aksioma yang disebutkan di atas. Beberapa klas ring yang khusus diantaranya adalah ring QB dan ring Exchange.

Tulisan ini membahas syarat sehingga ada keterkaitan antara ring Exchange dengan ring QB. Tulisan ini merupakan studi literatur berdasarkan penelusuran pada [1] dan [2].

2 RING QB

Diberikan suatu ring R, jika terdapat suatu elemen $e \in R$ sehingga memenuhi $\forall a \in R$ berlaku $ae = a$ dan $ea = a$, maka e dinamakan elemen satuan dari ring R dan seringkali dinotasikan dengan 1. Di dalam ring R yang memuat elemen

[1]Departemen Matematika, Fakultas Ilmu Pengetahuan Alam, Jalan Meranti Kampus IPB Dramaga Bogor, 16680.

satuan, elemen $x \in R$ dan elemen $y \in R$ dikatakan orthogonal terpusat, dinotasikan dengan $x \perp y$, apabila memenuhi $xRy = \{xry | r \in R\} = \{0\}$ dan $yRx = \{yrx | r \in R\} = \{0\}$. Elemen $u \in R$ yang memenuhi $(1 - ua) \perp (1 - bu)$ untuk suatu $a, b \in R$ disebut elemen invers quasi, dan himpunan dari elemen-elemen invers quasi dalam ring R dinotasikan dengan.R_q^{-1}. Selain itu, elemen $x \in R$ yang memenuhi persamaan $x = xyx$ untuk suatu $y \in R$ disebut elemen regular von Neumann dan y disebut elemen invers parsial untuk x [1]. Kaitan antara elemen invers quasi dengan elemen regular von Neumann terlihat pada teorema 1.

Teorema 1

Setiap elemen $u \in R_q^{-1}$ merupakan elemen regular von Neumann dan dapat dipilih suatu $v \in R_q^{-1}$ yang merupakan elemen invers parsial untuk u.

Bukti:

Diambil sebarang elemen $u \in R_q^{-1}$, oleh karenanya terdapat $a, b \in R$ sehingga

$$(1-ua)R\,(1-bu) = \{0\} = (1-bu)R(1-ua). \tag{1}$$

Karena $u \in R_q^{-1}$, yang berarti $u \in R$, maka dari (1) diperoleh

$$(1-ua)u(1-bu) = 0 \quad \text{atau} \quad u = uau + ubu - uaubu.$$

Selanjutnya jika dipilih elemen $v \in R$ dengan $v = a + b - aub$, maka diperoleh

$$uvu = u(a+b-aub)u = uau + ubu - uaubu = u.$$

Jadi terbukti bahwa u elemen regular von Neumann dengan elemen invers parsialnya adalah v. Selanjutnya

$$1-uv = 1-u(a+b-aub) = 1-ua-ub+uaub = (1-ua)-(1-ua)ub = (1-ua)(1-ub)$$

dan

$$1-vu = 1-(a+b-aub)u = 1-au-bu+aubu = (1-au)-(1-au)bu = (1-au)(1-bu)$$

Berdasarkan (1), diperoleh

$$(1-uv)R(1-vu) = (1-ua)(1-ub)R(1-au)(1-bu) = \{0\}$$

dan

$$(1-vu)R(1-uv) = (1-au)(1-bu)R(1-ua)(1-ub) = \{0\}.$$

Jadi terdapat $v \in R$ sehingga $(1-uv)R(1-vu) = \{0\} = (1-vu)R(1-uv)$ dan $u = uvu$. Terbukti $\exists v \in R_q^{-1}$ dan $u = uvu$.

Jika $u \in R_q^{-1}$, maka elemen $v \in R$ yang memenuhi

$$(1-uv)R(1-vu) = \{0\} = (1-vu)R(1-uv)$$

disebut elemen invers quasi dari u dan dinotasikan dengan u_q^{-1}. Berikut ini adalah sifat-sifat yang dapat dihasilkan dari elemen invers quasi.

Teorema 2

(i) Jika R adalah ring dengan elemen satuan dan $u, v \in R_q^{-1}$, dan yang satu merupakan invers quasi dari yang lain ($(1-uv) \perp (1-vu)$), maka setiap elemen dalam R yang berbentuk

$$v' = v + a(1-uv) + (1-vu)b\,, \tag{2}$$

dengan $a,\ b \in R$ merupakan suatu elemen invers quasi untuk $u \in R_q^{-1}$ dan memenuhi relasi-relasi $(1-uv') \perp (1-v'u)$, $(1-uv') \perp (1-vu)$, $(1-uv) \perp (1-v'u)$.

(ii) Jika v' sebarang elemen invers parsial untuk u, maka $v' \in R_q^{-1}$ dan berbentuk (2) dengan $a = b = v'$ dan diperoleh

$$1-uv = (1-uv)(1-uv') \text{ serta } 1-uv' = (1-uv')(1-uv) \tag{3}$$

Bukti:

(i) Karena diketahui $u \in R_q^{-1}$, maka menurut Teorema 1., u merupakan elemen regular von Neumann dan karena v adalah elemen invers quasi untuk u, maka $u = uvu$. Jelas bahwa $v' \in R$ dalam (2) merupakan invers parsial untuk u, sebab:

$$uv'u = u(v + a(1-uv) + (1-vu)b)u = u(v + a - auv + b - vub)u$$
$$= uvu + uau - uauvu + ubu - uvubu = (uvu) + uau - ua(uvu) + ubu - (uvu)bu$$
$$= u + uau - uau + ubu - ubu = u.$$

Lebih lanjut diperoleh

$$1-uv' = 1 - u(v + a(1-uv) + (1-vu)b) = 1 - uv - ua + uauv - ub + uvub$$
$$= (1-uv) - ua(1-uv) - (1-uv)ub = (1-ua)(1-uv) - (ub - uvub)$$
$$= (1-ua)(1-uv) - (ub - ub) = (1-ua)(1-uv) - 0 = (1-ua)(1-uv)$$

$$1 - v'u = 1 - (v + a(1-uv) + (1-vu)b)u = 1 - vu - au + auvu - bu + vubu$$
$$= (1-vu) - au(1-vu) - (1-vu)bu = (1-vu) - (1-vu)bu - au(1-vu)$$
$$= (1-vu)(1-bu) - au(1-vu) = (1-vu)(1-bu) - (au - auvu)$$
$$= (1-vu)(1-bu) - (au - au) = (1-vu)(1-bu) - 0 = (1-vu)(1-bu)$$

Karena diketahui bahwa $(1-uv) \perp (1-vu)$, maka diperoleh

$(1-uv') \perp (1-v'u)$, $(1-uv') \perp (1-vu)$, dan $(1-uv) \perp (1-v'u)$.

Terbukti bahwa elemen $v' \in R_q^{-1}$ dan merupakan elemen invers quasi untuk u.

(ii) Diketahui v' adalah sebarang elemen invers parsial untuk u, berarti $uv'u = u$. Karena diketahui bahwa $(1-uv) \perp (1-vu)$, maka

$$0 = (1-vu)v'(1-uv) = v' - vuv' - v'uv + vuv'uv$$
$$= v' - vuv' - v'uv + v(uv'u)v = v' - vuv' - v'uv + vuv = v' - vuv' - v'uv + v.$$

Kemudian, kedua ruas pada kesamaan terakhir dijumlah dengan v', diperoleh

$v' = v' + v' - vuv' - v'uv + v = v + v' - v'uv + v' - vuv' = v + v'(1-uv) + (1-vu)v'$.

Ini sesuai dengan (2) dengan mengambil $a = b = v'$, sehingga berdasarkan ba-gian (i) dari bukti Teorema 3. diperoleh $v' \in R_q^{-1}$ dengan $(1-uv') \perp (1-v'u)$.

Lebih lanjut, dapat diperoleh

$$(1-uv)(1-uv') = (1-uv) - (1-uv)uv' = 1 - uv - uv' + uvuv'$$
$$= 1 - uv - uv' + (uvu)v' = 1 - uv - uv' + uv' = 1 - uv \quad \text{dan}$$
$$(1-uv')(1-uv) = (1-uv') - (1-uv')uv = 1 - uv' - uv + uv'uv = 1 - uv' - uv + (uv'u)v$$
$$= 1 - uv' - uv + uv = 1 - uv'.$$

Jadi terbukti (3).

Selanjutnya akan didefinisikan pengertian relasi extend antara dua elemen regular von Neumann dan beberapa sifat-sifatnya berkenaan dengan relasi extend ini.

Definisi 3. Relasi Extend

Jika R suatu ring dengan elemen satuan dan $a, b \in R$ adalah elemen-elemen regular von Neumann, maka dikatakan a extend ke b, dinotasikan dengan $a \leq b$, apabila

$$a = axb = bxa = axa \text{ untuk suatu} x \in R. \quad (4)$$

Dari relasi extend tersebut, dapat diturunkan teorema berikut.

Teorema 4

Jika R adalah ring dengan elemen satuan dan $a \in R$ adalah elemen regular von Neumann, maka kedua pernyataan berikut ini ekuivalen.

1. $a \leq u$ untuk suatu elemen $u \in R_q^{-1}$.
2. $a = ava$ untuk suatu elemen $v \in R_q^{-1}$.

Bukti :

$1. \Rightarrow 2.$ Dari hipotesis diketahui bahwa $a \leq u$ untuk suatu $u \in R_q^{-1}$, karena itu menurut Teorema 1, u merupakan elemen regular von Neumann. Akibatnya, menurut Definisi 4,. $a = axu = uxa = axa$ untuk suatu $x \in R$. Karena u adalah elemen regular von Neumann dan $u \in R_q^{-1}$, maka menurut Teorema 1. lagi, $\exists v \in R_q^{-1}$ yang memenuhi $u = uvu$. Akhirnya diperoleh

$$a = axa = (a)xa = (axu)xa = ax(u)xa = ax(uvu)xa = (axu)v(uxa) = ava$$

$2. \Rightarrow 1.$ Diketahui $a = ava$ dengan $v \in R_q^{-1}$, jika diambil elemen-elemen p dan q dengan $p = va$ dan $q = av$, maka p dan q adalah elemen idempoten dalam R. Karena diketahui $v \in R_q^{-1}$, maka menurut Teorema 1, v

merupakan elemen regular von Neumann. Misalkan w adalah elemen invers parsial untuk v, maka $vwv = v$. Jika diambil $e, f \in R$ dengan $e = vw$ dan $f = wv$, maka e dan f adalah elemen idempoten. Karena $ep = (vw)(va) = (vwv)a = va = p$, maka jika diambil $e' = (1-p)e$, diperoleh

$$(e')^2 = (1-p)e(1-p)e = e^2 - pe^2 - epe + pepe = e - pe - (ep)e + p(ep)e$$
$$= e - pe - pe + ppe = e - pe - pe + pe = e - pe = (1-p)e = e'.$$

Jadi e' merupakan elemen idempoten dalam R. Selanjutnya, karena

$$(p+e')v = (p+(1-p)e)v = (p+e-pe)v = pv + ev - pev$$
$$= (va)v + (vw)v - (va)(vw)v = vav + (vwv) - va(vwv) \tag{5}$$
$$= vav + v - vav = v,$$

Maka

$$vR \subset (p+e')R = pR + e'R. \tag{6}$$

Di sisi lain, karena $p = va$, maka memenuhi $pR \subset vR$ dan karena

$$e' = (1-p)e = (1-va)vw = vw - vavw = v(w - avw)$$

dengan $(w - avw) \in R$, maka memenuhi $e'R \subset vR$, sehingga

$$(p+e')R \subset vR. \tag{7}$$

Dari (6) dan (7), diperoleh

$$(p+e')R = vR. \tag{8}$$

Selanjutnya karena $qf = (av)(wv) = a(vwv) = av = q$, maka jika diambil $f' = f(1-q)$, diperoleh

$$(f')^2 = f(1-q)f(1-q) = f^2 - fqf - f^2q + fqfq = f - f(qf) - fq + f(qf)q$$
$$= f - fq - fq + fqq = f - fq - fq + fq = f - fq = f(1-q) = f'.$$

Jadi f' merupakan elemen idempoten. Lebih lanjut,

$$v(q+f') = vq + vf' = vq + v(f(1-q)) = vq + vf - vfq$$
$$= v(av) + v(wv) - v(wv)(av) = vav + vwv - (vwv)av = vav + v - vav = v \tag{9}$$

dan

$$R(q+f') = Rv. \tag{10}$$

Dari (8) diperoleh $p + e' = vs$ untuk suatu $s \in R$ dan dari (10) dapat diperoleh $q + f' = tv$ untuk suatu elemen t dalam R. Selanjutnya, jika diambil $u = tvs$ dan dengan menggunakan (9), maka

$$vu = v(tvs) = v(tv)s = v(q+f')s = (v(q+f'))s = vs = p + e' \tag{11}$$

dan dengan menggunakan (5) diperoleh

$$uv = (tvs)v = t(vs)v = t(p+e')v = t((p+e')v) = tv = q + f'. \tag{12}$$

Dari (11) dan (5) diperoleh $vuv = (vu)v = (p+e')v = v$, sehingga u merupakan elemen invers parsial untuk v. Karena diketahui $v \in R_q^{-1}$, maka berdasarkan Teorema 2(ii) didapat $u \in R_q^{-1}$. Karena itu menurut

Teorema 1, u merupakan elemen regular von Neumann. Berdasarkan (11) diperoleh

$$avu = a(vu) = a(p+e') = ap + ae' = a(va) + a((1-p)e) = ava + (a-ap)e$$
$$= ava + (a - a(va))e = ava + (a - ava)e = a + (a-a)e = a$$

dan berdasarkan (12) diperoleh

$$uva = (uv)a = (q + f')a = qa + f'a = (av)a + (f(1-q))a = ava + f(a-qa)$$
$$= ava + f(a-(av)a) = ava + f(a-ava) = a + f(a-a) = a$$

Karena diperoleh $avu = uva = a = ava$ dengan a dan u adalah elemen regular von Neumann, maka menurut Definisi 3 disimpulkan bahwa $a \leq u$.

Ring QB oleh [1] didefinisikan ebagai suatu ring R yang mempunyai elemen satuan dan memenuhi $cr(R_q^{-1}) = R$ dengan $Cr(A)$, untuk $A \subseteq R$, adalah himpunan elemen-elemen $a \in R$ yang memenuhi: jika $ax + b = 1$ untuk suatu $x, b \in R$, maka terdapat $y \in R$ sehingga $a + by \in A$. Dengan kata lain ring QB adalah suatu ring R dengan elemen satuan yang memenuhi: $\forall a \in R$, jika $ax + b = 1$ untuk suatu $x, b \in R$, maka terdapat $y \in R$ sehingga $a + by \in R_q^{-1}$. Berikut adalah teorema yang terkait dengan ring QB.

Teorema 5

Diketahui R adalah ring dengan elemen satuan dan a adalah elemen regular von Neumann. Jika $a \in \mathrm{cr}(R_q^{-1})$, maka $a \leq u$ untuk suatu u dalam R_q^{-1}.

Bukti:

Karena a adalah elemen regular von Neumann, maka $a = axa$, untuk suatu $x \in R$. Jika diambil $p = 1 - ax$ dan $q = 1 - xa$, maka

$$p^2 = (1-ax)^2 = (1-ax)(1-ax) = 1 - ax - ax + (axa)x = 1 - ax - ax + ax = 1 - ax = p$$

dan

$$q^2 = (1-xa)^2 = (1-xa)(1-xa) = 1 - xa - xa + x(axa) = 1 - xa - xa + xa = 1 - xa = q.$$

Jadi p, q elemen idempoten, di samping itu diperoleh juga bahwa $pa = aq = 0$.

Karena $p = 1 - ax \Leftrightarrow ax + p = 1$ dengan $x,\ p \in R$, dan diketahui $a \in cr(R_q^{-1})$, maka $a + py \in R_q^{-1}$ untuk $y \in R$. Selanjutnya dari proses bukti di atas didapat $1 - p = ax$ dan $1 - q = xa$. Dengan mengambil $u = a + py$, maka $u \in R_q^{-1}$ dan berdasarkan Teorema 1, berakibat u adalah elemen regular von Neumann. Selanjutnya, untuk suatu $x \in R$, berlaku

$$axu = ax(a+py) = axa + axpy = a + axpy = a + ax(1-ax)y = a + (ax - ax)y = a,$$

karena $a = axa$ dan R adalah ring dengan elemen satuan, maka $ax = 1 = xa$, sehingga

$$uxa = (a+py)xa = axa + pyxa = a + pyxa = a + (1-ax)yxa = a + (1-1)yxa = a.$$

Jadi diperoleh a dan u adalah elemen regular von Neumann dan berlaku $a = axu = uxa = axa$. Dari sini, disimpulkan bahwa $a \leq u$ dengan $u \in R_q^{-1}$.

Akibat 6

Setiap elemen regular von Neumann dalam ring QB extend ke suatu elemen invers quasi.

3 RING EXCHANGE

Dalam ring R yang memuat elemen satuan, elemen $a \in R$ disebut elemen idempoten bila memenuh $a^2 = aa = a$. Ring R dengan elemen satuan, yang memenuhi sifat: $\forall a \in R$, terdapat elemen idempoten $e \in R$ sehingga $e \in aR$ dan $1 - e \in (1 - a)R$ disebut ring Exchange [2].

Teorema 7

Jika R adalah ring Exchange, maka ketiga pernyataan berikut ekuivalen.

1. R adalah ring QB.
2. Setiap elemen regular von Neumann extend suatu elemen dalam R_q^{-1}.
3. Untuk setiap elemen regular von Neumann $x \in R$, ada $v \in R_q^{-1}$ sehingga $x = xvx$.

Bukti:

$1. \Rightarrow 2.$ Langsung diperoleh dari Akibat 6.

$2. \Rightarrow 1.$ Diambil $ax + b = 1$. Karena diketahui R adalah ring Exchange, maka menurut definisi ring Exchange, untuk setiap $ax \in R$ terdapat elemen idempoten $p \in axR$ sehingga $(1 - p) \in (1 - ax)R = bR$. Jika diambil $p = axr$ dan $1 - p = bs$ dengan $r, s \in R$, maka diperoleh $pa(xr)pa = p(axr)pa = pppa = p^2 pa = ppa = pa$, dengan kata lain pa merupakan suatu elemen regular von Neumann dengan invers parsialnya adalah xr. Selanjutnya, berdasarkan hipotesisnya bahwa $pa \leq u$ dengan $u \in R_q^{-1}$, berarti memenuhi

$$pa = u(xr)pa = pa(xr)u = p(axr)u = ppu = pu,$$

sehingga

$$\begin{aligned} u &= u + 0 = u + (pu - pu) = pu + u - pu = pa + u - pu = pa + u - pu + 0 \\ &= pa + u - pu + (a - a) = a + u - a - pu + pa = a + (u - a) - p(u - a) \\ &= a + (1 - p)(u - a) = a + bs(u - a). \end{aligned}$$

Jika diambil $y = s(u-a)$, maka diperoleh $u = a + by$ dalam R_q^{-1} dengan $y \in R$. Jadi terbukti bahwa R adalah ring QB.

$2. \Leftrightarrow 3.$ Sudah dibuktikan pada Teorema 4.

Teorema 8

Jika R adalah suatu ring exchange, maka kedua pernyataan berikut ini ekuivalen.

1. R adalah suatu ring QB.
2. Untuk setiap elemen regular $x \in R$, ada $u \in R_q^{-1}$ sehingga $ux = (ux)^2 \in R$.

Bukti:

$1. \Rightarrow 2.$ Ambil sebarang elemen regular von Neumann $x \in R$. Menurut hipotesisnya, R adalah suatu ring QB, maka berdasarkan Teorema 7., ada $u \in R_q^{-1}$ sehingga $x = xux$. Jika masing-masing ruas digandakan dengan u dari sebelah kiri, maka diperoleh $ux = uxux = (ux)^2$ dalam R. Terlihat bahwa ux merupakan elemen idempoten dalam R.

$2. \Rightarrow 1.$ Ambil $ax + b = 1$ dengan $a, x, b \in R$, maka diperoleh $ax = 1 - b$. Karena R diketahui ring Exchange, maka ada elemen idempoten $e \in R$ sehingga $e \in bR$ dan $1 - e \in (1-b)R$. Karena $e \in bR$ dan $1 - e \in (1-b)R$, maka e dan $1-e$ dapat ditulis sebagai $e = bs$ dan $1 - e = (1-b)t$ dengan $s, t \in R$. Jadi

$(1-e)axt + e = (1-e)(1-b)t + e = (1-e)(1-e) + e = 1 - e - e + ee = 1 - e - e + e + e = 1$

atau $(1-e)axt = 1 - e$. Elemen $(1-e)a$ merupakan elemen regular von Neumann dalam R karena terdapat elemen $y = xt$ dalam R sehingga

$(1-e)\ a\ y\ (1-e)\ a = (1-e)\ a\ (xt)\ (1-e)\ a = (1-e)\ (1-e)\ a = (1-e)a.$

Oleh karena itu, menurut hipotesis, $\exists u \in R_q^{-1}$ sehingga $u(1-e)a$ adalah elemen idempoten dalam R. Kemudian, namakan $u(1-e)a$ dengan f , maka dengan menggandakan kedua ruas pada $(1-e)axt = 1 - e$. dari sebelah kiri dengan u, diperoleh $u(1-e)axt + ue = u$ atau $fxt + ue = u$. Akibatnya diperoleh

$$ue = (u - fxt),$$

dan

$$f(xt + ue) + (1-f)ue = fxt + fue + ue - fue = fxt + ue \ = u.$$

Karena f adalah elemen idempoten, diperoleh

$(1-f)\ ue\ =\ (\ 1-f\ )\ (\ u - fxt\ ) = u - fu - fxt + f^2xt = u - fu - fxt + fxt = (1-f)u.$

Selanjutnya, jika diambil $g = (1+f)\,u\,e\,u_q^{-1}(1-f)$, maka diperoleh

$$(1-f)\,ue \;=\; (1-f)u \;=(1-f^2)u = \;(1+f)\;(1-f)u = \;(1+f).1.(1-f)u$$
$$= \;\big((1+f)\;\;u\big)\;u_q^{-1}\;\,(1-f)\,u = \;(1+f)\;\;u\;e\;u_q^{-1}\;\,(1-f)(1-f)\,u$$
$$= \;\big((1+f)\;\;u\;e\;u_q^{-1}\;\,(1-f)\big)\;(1-f)u = g(1-f)u.$$

Selain itu diperoleh

$$gf \;=(1+f)ueu_q^{-1}(1-f)\,f \;=(1+f)ueu_q^{-1}(\,f-f^2) = (1+f)ueu_q^{-1}(\,f-f\,) \quad =0$$
$$f(x+ue) = u-(1-f)ue \;=\; u-(1-f)u \;=\; fu$$
$$g(1-f)u = gu-gfu = gu-0\,u = gu.$$

Selanjutnya diperoleh

$$(1-f)u = (1-f)ue = g(1-f)u = gu-gfu = gu-0u = gu$$

atau $(\,f+g)u = \;fu+gu = u.$ Sehingga diperoleh

$$u\;[\;a+bs(u_q^{-1}(1-f)-a)]\;\;[\;1+\;fueu_q^{-1}(1-f)\;]\;\;u$$
$$=u\;[\;a+e\;(u_q^{-1}-u_q^{-1}f-a)\;]\;\;[\;1+\;fueu_q^{-1}(1-f)\;]\;\;u$$
$$=u\;[\;a+eu_q^{-1}-eu_q^{-1}f-ea\;]\;\;[\;1+\;fueu_q^{-1}(1-f)\;]\;\;u$$
$$=u\;[\;(1-e)a+eu_q^{-1}(1-f)\;]\;\;[\;1+\;fueu_q^{-1}(1-f)\;]\;\;u$$
$$=[\;u(1-e)a+ueu_q^{-1}(1-f)\;]\;\;[\;1+\;fueu_q^{-1}(1-f)\;]\;\;u$$
$$=[\;f+ueu_q^{-1}(1-f)\;]\;\;[\;1+\;fueu_q^{-1}(1-f)\;]\;\;u$$
$$=[\;f+ueu_q^{-1}(1-f)-0]\;\;[1+\;fueu_q^{-1}(1-f)\;]\,u$$
$$=[\;f+ueu_q^{-1}(1-f)-ueu_q^{-1}(\,f-f\,)\;ueu_q^{-1}(1-f)\;]\;\;[1+\;fueu_q^{-1}(1-f)\;]\,u$$
$$=[\;f+ueu_q^{-1}(1-f)-ueu_q^{-1}(\,f-f^2)\;ueu_q^{-1}(1-f)\;]\;\;[1+\;fueu_q^{-1}(1-f)\;]\,u$$
$$=[\;f+ueu_q^{-1}(1-f)-ueu_q^{-1}(1-f)\,f\;\;ueu_q^{-1}(1-f)\;]\;\;[1+\;fueu_q^{-1}(1-f)\;]\,u$$
$$=[\;f+ueu_q^{-1}(1-f)\;\;(1-\;fueu_q^{-1}(1-f)\;]\;\;[1+\;fueu_q^{-1}(1-f)\;]\,u$$
$$= \;\Big[\,f\;\,(1+\;fueu_q^{-1}(1-f)\;)+ueu_q^{-1}(1-f)\big(1-\;fueu_q^{-1}(1-f)\big)\big(\;1+\;fueu_q^{-1}(1-f)\big)\Big]$$
$$=\Big[\;f+\;f^2ueu_q^{-1}(1-f)+ueu_q^{-1}(1-f)(1^2-\;fueu_q^{-1}(1-f)\,fueu_q^{-1}(1-f))\Big]\;u$$
$$=\Big[\;f+\;fueu_q^{-1}(1-f)+ueu_q^{-1}(1-f)(1-\;fueu_q^{-1}(\,f-f^2)ueu_q^{-1}(1-f))\Big]\;u$$
$$=\Big[\;f+(1+f)ueu_q^{-1}(1-f)(1-\;fueu_q^{-1}(\,f-f\,)ueu_q^{-1}(1-f))\Big]\;\;u$$
$$=\Big[\;f+(1+f)ueu_q^{-1}(1-f)(1-0)\Big]\;u$$
$$=[\;f+(1+f)ueu_q^{-1}(1-f)\;]\;\;u$$
$$=[\,f+g\,]\;\;u \quad =u.$$

Jika diambil $y = s\;\;(\;u_q^{-1}\,(1-f)\;-\;a\;\;)$ dan $w = (\;\;1+\;fueu_q^{-1}\,(1-f)\;\;)\;\;u\,,$ maka

$$w(a+by)w = [\ 1+ fueu_q^{-1}(1-f)\ ]\ u\ [\ a+bs(u_q^{-1}(1-f)-a)\ ]\ [\ 1+ fueu_q^{-1}(1-f)\ ]\ u$$
$$= [\ 1+ fueu_q^{-1}(1-f)\ ]\ \left(u\ [\ a+bs(u_q^{-1}(1-f)-a)\ ]\ [\ 1+ fueu_q^{-1}(1-f)\ ]\ u\right)$$
$$= [\ 1+ fueu_q^{-1}(1-f)\ ]\ u = w,$$

dengan $w \in R_q^{-1}$. Ka rena $w \in R_q^{-1}$, maka terdapat w_q^{-1} yang memenuhi $(1-w_q^{-1}w)\ R\ (1-ww_q^{-1}) = \{\ 0\ \}$, dan karena $(a+by) \in R$, maka diperoleh

$(1-w_q^{-1}w)\ (a+by)\ (1-ww_q^{-1}) = 0$ yang ekuivalen dengan

$$(a+by) - w_q^{-1}w(a+by) - (a+by)ww_q^{-1} + w_q^{-1}w(a+by)ww_q^{-1} = 0.$$

Dengan menjumlahkan kedua ruas dengan $a+by$ pada kesamaan terakhir di atas, diperoleh

$$a+by = (a+by) + (a+by) - w_q^{-1}w(a+by) - (a+by)ww_q^{-1} + w_q^{-1}w(a+by)ww_q^{-1}$$
$$= w_q^{-1}\big(w(a+by)w\big)w_q^{-1} + (a+by) - (a+by)ww_q^{-1} + (a+by) - w_q^{-1}w(a+by)$$
$$= w_q^{-1}ww_q^{-1} + (a+by)(1-ww_q^{-1}) + (1-w_q^{-1}w)(a+by)$$
$$= w_q^{-1}1 + (a+by)(1-ww_q^{-1}) + (1-w_q^{-1}w)(a+by)$$
$$= w_q^{-1} + (a+by)(1-ww_q^{-1}) + (1-w_q^{-1}w)(a+by).$$

Berdasarkan Teorema 2, disimpulkan $a+by \in R_q^{-1}$. Terbukti R ring QB.

4 SIMPULAN

Dari Teorema 8 dapat disimpulkan bahwa suatu ring Exchange R akan merupakan ring QB jika dan hanya jika Untuk setiap elemen regular von Neumann $x \in R$, ada $u \in R_q^{-1}$ sehingga $ux = (ux)^2 \in R$

DAFTAR PUSTAKA

[1] Ara P, Pedersen GK, Perera F. 2000. An Infinite Analogue of Rings With Stable Range One. *J. Algebra*. 230: 608-655.
[2] Chen H. 2003. On Exchange QB Rings. *Communication in Algebra*. 31(2): 831-841.