

# MODEL MATEMATIKA DAN ANALISIS KANDUNGAN OKSIGEN TERLARUT DALAM BADAN AIR YANG MENGALAMI EUTROFIKASI

S. L. MAHMUD<sup>1</sup>, E. H. NUGRAHANI<sup>2</sup>, P. SIANTURI<sup>2</sup>

## Abstrak

Dalam tulisan ini dibahas model matematika perubahan kandungan oksigen terlarut dalam badan air yang mengalami eutrofikasi. Variabel yang dipertimbangkan dalam model ini adalah konsentrasi *nutrien*, *alga*, *makrofit*, *zooplankton*, *detritus* dan konsentrasi oksigen terlarut. Hasil analisis dan simulasi model memperoleh enam titik tetap yang satu diantaranya stabil dan lima lainnya tidak stabil. Simulasi juga dilakukan untuk melihat pengaruh laju masukan nutrisi dan laju perubahan *detritus* menjadi *nutrien* terhadap perubahan kandungan oksigen terlarut. Dari hasil simulasi diperoleh bahwa jika laju masukan nutrisi dan laju perubahan *detritus* menjadi *nutrient* meningkat, maka konsentrasi oksigen terlarut di badan air menurun.

**Kata kunci:** model matematika, oksigen terlarut, eutrofikasi, kestabilan

## PENDAHULUAN

Eutrofikasi adalah proses pengayaan nutrisi melalui proses dekomposisi yang dapat memicu terjadinya perubahan seperti meningkatnya produksi *alga* atau tumbuhan lainnya yang mengakibatkan berkurangnya oksigen terlarut dalam badan air [1]. Oksigen terlarut adalah oksigen yang digunakan oleh makhluk hidup yang tinggal di dalam air baik hewan maupun tumbuhan untuk mempertahankan hidupnya [2]. Kandungan oksigen terlarut dapat bersumber dari proses difusi oksigen yang berasal dari udara maupun proses fotosintesis oleh *alga* dan tumbuhan. Kadar oksigen dari kedua proses ini mengakibatkan peningkatan kandungan oksigen terlarut yang tidak terlalu tinggi. Hal ini disebabkan karena ketika semakin banyak nutrisi masuk ke danau maka pertumbuhan *alga* dan tumbuhan juga semakin banyak, sehingga *alga* dan tumbuhan menutupi permukaan air, yang menyebabkan perpindahan oksigen dari udara ke air melalui difusi menjadi berkurang dan cahaya yang digunakan untuk proses fotosintesis juga menjadi berkurang.

Selain itu, ketika *alga* dan tumbuhan mati dan tenggelam ke bagian bawah badan air, terjadi pembusukan oleh dekomposer yang akhirnya terbentuk *detritus* yang berlebihan. *Detritus* tersebut selanjutnya diubah menjadi nutrisi melalui

---

<sup>1</sup>Mahasiswa S2, Program Studi Matematika Terapan, Sekolah Pascasarjana IPB Dramaga Bogor, 16680.

<sup>2</sup>Departemen Matematika, Fakultas Ilmu Pengetahuan Alam, Jalan Meranti Kampus IPB Dramaga Bogor, 16680.

proses biokimia. Proses pembentukan dan perubahan *detritus* menjadi *nutrient* menggunakan banyak oksigen terlarut, sehingga mengurangi kandungan oksigen terlarut. Penggunaan oksigen terlarut yang sangat besar pada proses biokimia mengakibatkan suplai oksigen terlarut bagi ikan dan komponen akuatik lainnya menjadi berkurang sehingga hal ini dapat berpengaruh buruk terhadap kehidupan ikan dan kehidupan akuatik lainnya [3].

Voinov dan Tonkikh [4] telah menyajikan sebuah model matematika nonlinear untuk eutrofikasi di danau yang menyebabkan berkurangnya oksigen terlarut. Model tersebut mengasumsikan bahwa penyebab berkurangnya oksigen terlarut hanya dipengaruhi oleh *nutrien*, *alga* dan *detritus*. Model Voinov dan Tonkikh dikaji lebih lanjut oleh Misra [5] dengan menambahkan parameter *zooplankton* pada model dan direkonstruksi kembali oleh Misra [6] dengan menambahkan parameter *makrofita* dan mengabaikan parameter *zooplankton* pada model.

Penelitian ini akan mengkaji sebuah model modifikasi yang mengacu pada kajian Misra [5] dan Misra [6] dengan menambahkan sekaligus parameter zooplankton dan makrofita pada model matematika kandungan oksigen terlarut dalam badan air yang mengalami eutrofikasi.

## MODEL MATEMATIKA

Variabel yang dipertimbangkan dalam model ini adalah konsentrasi *nutrien* ( $N$ ), populasi *alga* ( $A$ ), populasi *makrofita* ( $M$ ), populasi *zooplankton* ( $Z$ ), kepadatan *detritus* ( $S$ ) dan konsentrasi oksigen terlarut ( $C$ ). Model ini mengasumsikan bahwa jumlah laju aliran nutrisi yang berasal dari luar (limbah rumah tangga dan limbah pertanian) ke dalam badan air adalah  $q$ , yang berkurang dengan laju  $\alpha_0 N$ . Selain itu, diasumsikan juga bahwa laju bertambahnya *nutrient* oleh *detritus* adalah  $\pi_0 \delta S$  dan laju berkurangnya *nutrient* oleh *alga* sebanding dengan kepadatan alga dan jumlah konsentrasi nutrisi yaitu  $NA$  serta laju berkurangnya *nutrien* karena makrofita sebanding dengan kepadatan makrofita dan jumlah konsentrasi *nutrient* yaitu  $NM$ . Hal ini mengakibatkan laju populasi *alga* sebanding dengan  $NA$  dan laju populasi *makrofita* adalah sebanding dengan  $NM$ . Laju berkurangnya *alga* secara alami diasumsikan sebanding dengan kepadatannya dan laju berkurangnya *alga* akibat interaksi antara *alga* atau akibat kesesakan sebanding dengan  $A^2$ . Sama halnya dengan laju berkurangnya *makrofita* secara alami diasumsikan sebanding dengan kepadatannya  $M$  dan laju berkurangnya *makrofita* akibat interaksi antara *makrofita* itu sendiri atau akibat kesesakan sebanding dengan  $M^2$ .

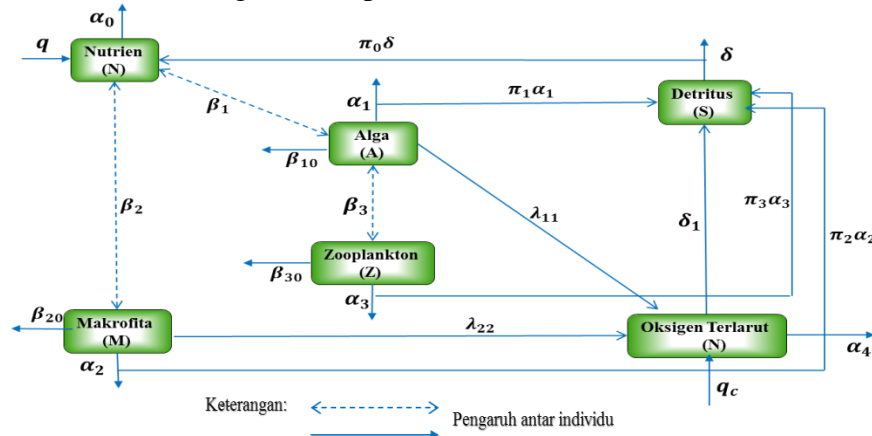
Laju berkurangnya *alga* oleh *zooplankton* sebagai predatornya dianggap sebanding dengan  $(AZ)$  dan karenanya laju pertumbuhan *zooplankton* juga sebanding ke  $(AZ)$ . Laju berkurangnya *zooplankton* secara alami diasumsikan sebanding dengan kepadatannya  $Z$  dan laju berkurangnya karena interaksi antara

*zooplankton* atau karena kesesakan sebanding dengan  $Z^2$ . Laju pertumbuhan detritus yang berasal dari *alga*, *makrofit*, dan *zooplankton* yang berkurang secara alami diasumsikan sebanding dengan  $A$ ,  $M$  dan  $Z$  serta laju berkurangnya *detritus* secara alami diasumsikan sebanding dengan  $S$ .

Berdasarkan uraian di atas, dapat dituliskan bahwa asumsi yang digunakan dalam model ini yakni sebagai berikut:

- ✓ Nutrisi masuk ke badan air melalui air limpasan bidang pertanian dan limbah rumah tangga, diasumsikan konstan.
- ✓ Laju pertumbuhan *alga* dan *makrofit* sepenuhnya bergantung pada *nutrient*.
- ✓ Populasi *zooplankton* sepenuhnya bergantung pada *alga*
- ✓ *Detritus* yang diperoleh dari *alga*, *makrofit* dan *zooplankton* yang mati, kemudian didekomposisi melalui proses biokimia menjadi *nutrien*.
- ✓ Konsentrasi oksigen terlarut meningkat karena proses difusi oksigen dan proses fotosintesis *alga* dan *makrofit* yang diasumsikan konstan serta menurun akibat digunakan dalam proses pembentukan *detritus* menjadi.

Secara skematis, pola berkurangnya oksigen terlarut dalam model ini dapat digambarkan dalam diagram kompartemen berikut:



Gambar 1 Skema model matematika kandungan oksigen terlarut pada badan air yang mengalami eutrofikasi.

Model yang menggambarkan fenomena tersebut diformulasikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 \frac{dN}{dt} &= q + \pi_0 \delta S - \alpha_0 N - \beta_1 AN - \beta_2 NM \\
 \frac{dA}{dt} &= \theta_1 \beta_1 NA - \alpha_1 A - \beta_{10} A^2 - \beta_3 AZ \\
 \frac{dM}{dt} &= \theta_2 \beta_2 NM - \alpha_2 M - \beta_{20} M^2 \\
 \frac{dZ}{dt} &= \theta_3 \beta_3 AZ - \alpha_3 Z - \beta_{30} Z^2 \\
 \frac{dS}{dt} &= \pi_1 \alpha_1 A + \pi_2 \alpha_2 M + \pi_3 \alpha_3 Z - \delta S \\
 \frac{dC}{dt} &= q_c - \alpha_4 C + \lambda_{11} A + \lambda_{22} M - \delta_1 S
 \end{aligned}
 \tag{2.1}$$

di mana:  $N(0) \geq 0, A(0) \geq 0, M(0) \geq 0, Z(0) \geq 0, S(0) \geq 0, C(0) \geq 0$ .

Sistem (2.1) inilah yang selanjutnya akan dianalisis. Analisis tersebut meliputi penentuan titik tetap dan kestabilan serta simulasi numerik untuk menggambarkan kandungan oksigen terlarut di badan air yang mengalami eutrofikasi.

### 3 HASIL DAN PEMBAHASAN

#### 3.1 Penentuan Titik Tetap

Titik tetap dari sistem persamaan diferensial (2.1) diperoleh dengan menentukan  $\frac{dN}{dt} = \frac{dA}{dt} = \frac{dM}{dt} = \frac{dZ}{dt} = \frac{dS}{dt} = \frac{dC}{dt} = 0$ . Hasil analisis menunjukkan bahwa sistem tersebut memiliki enam jenis titik tetap yaitu  $E_i(N_i^*, A_i^*, M_i^*, Z_i^*, S_i^*, C_i^*)$  dimana  $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ .

1.  $E_1(q/\alpha_0, 0, 0, 0, 0, q_c/\alpha_4)$ .

Titik tetap  $E_1$  selalu ada (*exist*) karena  $q, q_c, \alpha_0$  dan  $\alpha_4$  selalu positif. Titik tetap ini menyatakan bahwa *alga*, *makrofita* dan *zooplankton* belum ada pada badan air. Sejalan dengan hal tersebut, maka *detritus* pun belum terbentuk di badan air. Pada titik tetap ini konsentrasi *nutrien* dan oksigen terlarut masing-masing mencapai nilai titik tetapnya.

2.  $E_2(N_2^*, 0, M_2^*, 0, S_2^*, C_2^*)$ .

Titik tetap  $E_2$  memerlukan syarat agar selalu mengandung komponen positif yakni

$$-\alpha_0\alpha_2 + q\beta_2\theta_2 > 0 \text{ dan } q_c - S_2^*\delta_1 + M_2^*\lambda_{22} > 0.$$

Titik tetap ini menyatakan bahwa *alga* dan *zooplankton* belum ada pada badan air, maka badan air yang tercemar hanya berpengaruh pada populasi *makrofita*.

3.  $E_3(N_3^*, A_3^*, 0, 0, S_3^*, C_3^*)$ .

Titik tetap  $E_3$  memerlukan syarat agar selalu mengandung komponen positif yakni

$$-\alpha_0\alpha_1 + q\beta_1\theta_1 > 0 \text{ dan } q_c - S_3^*\delta_1 + A_3^*\lambda_{11} > 0.$$

Titik tetap ini menyatakan bahwa *makrofita* dan *zooplankton* belum ada pada badan air menyebabkan badan air yang tercemar hanya berpengaruh pada populasi *alga*.

4.  $E_4(N_4^*, A_4^*, 0, Z_4^*, S_4^*, C_4^*)$ .

Titik tetap  $E_4$  memerlukan syarat agar selalu mengandung komponen positif yakni

$$\alpha_0\alpha_3\beta_3 - \alpha_0\alpha_1\beta_{30} - \pi_0\pi_3\alpha_3^2\beta_1\theta_1 + q\beta_1\beta_{30}\theta_1 > 0 \text{ dan } -\alpha_3 + A_4^*\beta_3\theta_3 > 0 \text{ dan } q_c - S_4^*\delta_1 + A_4^*\lambda_{11} > 0.$$

Titik tetap ini menyatakan bahwa *makrofita* belum ada pada badan air, maka badan air yang tercemar berpengaruh pada populasi *alga* dan *zooplankton*.

5.  $E_5(N_5^*, A_5^*, M_5^*, 0, S_5^*, C_5^*)$ .

Titik tetap  $E_5$  memerlukan syarat agar selalu mengandung komponen positif yakni

$$-\pi_0 \pi_2 \alpha_2^2 \beta_{10} - \pi_0 \pi_1 \alpha_1^2 \beta_{20} + q \beta_{10} \beta_{20} > 0 \text{ dan } -\alpha_1 + N_5^* \beta_1 \theta_1 > 0 \text{ dan } -\alpha_2 + N_5^* \beta_2 \theta_2 > 0 \text{ dan } q_c - S_5^* \delta_1 + A_5^* \lambda_{11} + \lambda_{22} M_5^* > 0.$$

Titik tetap ini menyatakan bahwa *zooplankton* belum ada pada badan air, maka badan air yang tercemar berpengaruh pada populasi *alga* dan *makrofita*.

6.  $E_6(N_6^*, A_6^*, M_6^*, Z_6^*, S_6^*, C_6^*)$ .

Titik tetap  $E_6$  memerlukan syarat agar selalu mengandung komponen positif yakni

$$\begin{aligned} & -\alpha_2 \alpha_3 \beta_1 \beta_2 \beta_3 \beta_{30} \theta_1 + \alpha_0 \alpha_3 \beta_1 \beta_{20} \beta_3 \beta_{30} \theta_1 + \alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \beta_2 \beta_{30}^2 \theta_1 \\ & -\alpha_0 \alpha_1 \beta_1 \beta_{20} \beta_{30}^2 \theta_1 - \pi_0 \pi_3 \alpha_3^2 \beta_1^2 \beta_{20} \beta_{30} \theta_1^2 + q \beta_1^2 \beta_{20} \beta_{30}^2 \theta_1^2 \\ & -\alpha_3^2 \beta_2^2 \beta_3^2 \theta_2 + 2 \alpha_1 \alpha_3 \beta_2^2 \beta_3 \beta_{30} \theta_2 - \alpha_1^2 \beta_2^2 \beta_{30}^2 \theta_2 \\ & -\pi_0 \pi_2 \alpha_2 \alpha_3 \beta_1 \beta_2 \beta_3 \beta_{30} \theta_1 \theta_2 + \pi_0 \pi_2 \alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \beta_2 \beta_{30}^2 \theta_1 \theta_2 > 0 \text{ dan } \\ & -\alpha_3 + A_6^* \theta_3 \beta_3 > 0 \text{ dan } -\alpha_2 + N_6^* \theta_2 \beta_2 > 0 \text{ dan } \\ & q_c - S_6^* \delta_1 + A_6^* \lambda_{11} + \lambda_{22} M_6^* > 0. \end{aligned}$$

Titik tetap ini menyatakan bahwa *alga*, *makrofita* dan *zooplankton*, semuanya berada dalam badan air.

Untuk mendapatkan nilai dari masing-masing variabel yang berada dalam titik tetap dapat dilakukan sebagai berikut:

a) Keberadaan titik tetap  $E_1(q/\alpha_0, 0, 0, 0, 0, q_c/\alpha_4)$  sudah jelas.

b) Pada titik tetap  $E_2(N_2^*, 0, M_2^*, 0, S_2^*, C_2^*)$  nilai-nilai  $N_2^*$ ,  $M_2^*$ ,  $S_2^*$  dan  $C_2^*$  diperoleh dengan menyelesaikan sistem persamaan aljabar berikut:

$$q + \pi_0 \delta S - \alpha_0 N - \beta_2 N M = 0 \tag{3.1}$$

$$\theta_2 \beta_2 N - \alpha_2 - \beta_{20} M = 0 \tag{3.2}$$

$$\pi_2 \alpha_2 M - \delta S = 0 \tag{3.3}$$

$$q_c - \alpha_4 C + \lambda_{22} M - \delta_1 S = 0 \tag{3.4}$$

Dengan menyelesaikan persamaan (3.2) dan (3.3) masing-masing dalam  $N$  dan  $S$ , kemudian mensubstitusi hasil tersebut ke dalam (3.1) diperoleh persamaan kuadrat dalam  $M$  yaitu:

$$-M^2 \beta_2 \beta_{20} + M(-\alpha_2 \beta_2 - \alpha_0 \beta_{20} + \pi_0 \pi_2 \alpha_2 \beta_2 \theta_2) - \alpha_0 \alpha_2 + q \beta_2 \theta_2 = 0.$$

Untuk mendapatkan nilai  $M$ , pilih akar  $M$  positif dari penyelesaian persamaan kuadrat tersebut yang selanjutnya dinotasikan  $M_2^*$ . Dengan menggunakan nilai  $M_2^*$  dalam persamaan (3.2) dan (3.3) diperoleh nilai-nilai positif  $N_2^*$  dan  $S_2^*$ . Selanjutnya, nilai  $M_2^*$  dan  $S_2^*$  disubstitusikan pada persamaan (3.4) sehingga diperoleh nilai  $C$  positif yang dinotasikan  $C_2^*$ .

c) Untuk menunjukkan keberadaan titik tetap  $E_3$  caranya mirip dengan titik tetap  $E_2$ .

d) Pada titik tetap  $E_4(N_4^*, A_4^*, 0, Z_4^*, S_4^*, C_4^*)$  nilai-nilai  $N_4^*$ ,  $A_4^*$ ,  $Z_4^*$ ,  $S_4^*$  dan  $C_4^*$  diperoleh dengan menyelesaikan sistem persamaan aljabar berikut:

$$q + \pi_0 \delta S - \alpha_0 N - \beta_1 N A = 0 \tag{3.5}$$

$$\theta_1 \beta_1 N - \alpha_1 - \beta_{10} A - \beta_3 Z = 0 \tag{3.6}$$

$$\theta_3 \beta_3 A - \alpha_3 - \beta_{30} Z = 0 \tag{3.7}$$

$$\pi_1 \alpha_1 A + \pi_3 \alpha_3 Z - \delta S = 0 \quad (3.8)$$

$$q_c - \alpha_4 C + \lambda_{11} A - \delta_1 S = 0 \quad (3.9)$$

Dengan menyelesaikan persamaan (3.7) dalam  $Z$  kemudian mensubstitusikan  $Z$  ke dalam persamaan (3.6) dan (3.8) maka diperoleh nilai  $N$  dan  $S$ . Selanjutnya hasil tersebut disubstitusikan ke dalam (3.5) sehingga diperoleh persamaan kuadrat dalam  $A$  yaitu:

$$\begin{aligned} & -\frac{A^2(\beta_{10}\beta_{30} + \beta_3^2\theta_3)}{\beta_{30}\theta_1} + \\ & \frac{A(\alpha_3\beta_1\beta_3 - \alpha_1\beta_1\beta_{30} - \alpha_0\beta_{10}\beta_{30} + \pi_0\pi_1\alpha_1\beta_1\beta_{30}\theta_1 - \alpha_0\beta_3^2\theta_3 + \pi_0\pi_3\alpha_3\beta_1\beta_3\theta_1\theta_3)}{\beta_1\beta_{30}\theta_1} + \\ & \frac{\alpha_0\alpha_3\beta_3 - \alpha_0\alpha_1\beta_{30} - \pi_0\pi_1\alpha_3^2\beta_1\theta_1 + q\beta_1\beta_{30}\theta_1}{\beta_1\beta_{30}\theta_1} = 0. \end{aligned}$$

Untuk mendapatkan nilai  $A$ , pilih akar  $A$  positif dari penyelesaian persamaan kuadrat tersebut yang selanjutnya dinotasikan  $A_4^*$ . Dengan menggunakan nilai  $A_4^*$  dalam (3.6), (3.7) dan (3.8) diperoleh nilai-nilai positif  $N_4^*$ ,  $Z_4^*$  dan  $S_4^*$ . Selanjutnya, nilai  $N_4^*$  dan  $S_4^*$  disubstitusikan ke dalam (3.9) sehingga diperoleh nilai  $C$  positif yang dinotasikan  $C_4^*$ .

e) Untuk menunjukkan keberadaan titik tetap  $E_5$ , caranya mirip dengan titik tetap  $E_4$ .

f) Pada titik tetap  $E_6(N_6^*, A_6^*, M_6^*, Z_6^*, S_6^*, C_6^*)$  nilai-nilai  $n_6^*$ ,  $\alpha_6^*$ ,  $m_6^*$ ,  $Z_6^*$ ,  $S_6^*$  dan  $C_6^*$  diperoleh dengan menyelesaikan persamaan aljabar berikut:

$$q + \pi_0 \delta S - \alpha_0 N - \beta_1 AN - \beta_2 NM = 0 \quad (3.10)$$

$$\theta_1 \beta_1 N - \alpha_1 - \beta_{10} A - \beta_3 Z = 0 \quad (3.11)$$

$$\theta_2 \beta_2 N - \alpha_2 - \beta_{20} M = 0 \quad (3.12)$$

$$\theta_3 \beta_3 A - \alpha_3 - \beta_{30} Z = 0 \quad (3.13)$$

$$\pi_1 \alpha_1 A + \pi_2 \alpha_2 M + \pi_3 \alpha_3 Z - \delta S = 0 \quad (3.14)$$

$$q_c - \alpha_4 C + \lambda_{11} A + \lambda_{22} M - \delta_1 S = 0 \quad (3.15)$$

Dengan menyelesaikan persamaan (3.13) dalam  $Z$  kemudian mensubstitusikan  $Z$  ke dalam persamaan (3.11), maka diperoleh nilai  $N$ . Selanjutnya hasil tersebut disubstitusikan ke dalam persamaan (3.12) lalu selesaikan persamaan tersebut dalam  $M$ . Selanjutnya nilai  $Z$  dan  $M$  disubstitusikan ke dalam persamaan (3.14) lalu selesaikan persamaan tersebut dalam  $S$ . Selanjutnya substitusi  $N$ ,  $M$  dan  $S$  ke dalam persamaan (3.10) sehingga diperoleh persamaan kuadrat dalam  $A$  yaitu:

$$\begin{aligned} & -A^2(\beta_{10}\beta_{30} + \beta_3^2\theta_3)(\beta_1^2\beta_{20}\beta_{30}\theta_1 + \beta_{10}\beta_2^2\beta_{30}\theta_2 + \beta_2^2\beta_3^2\theta_2\theta_3) + \\ & a(\alpha_3\beta_1^2\beta_{20}\beta_3\beta_{30}\theta_1 + \alpha_2\beta_1\beta_{10}\beta_2\beta_{30}^2\theta_1 - \alpha_1\beta_1^2\beta_{20}\beta_{30}^2\theta_1 - \\ & \alpha_0\beta_1\beta_{10}\beta_{20}\beta_{30}^2\theta_1 + \pi_0\pi_1\alpha_1\beta_1^2\beta_{20}\beta_{30}^2\theta_1^2 + 2\alpha_3\beta_{10}\beta_2^2\beta_3\beta_{30}\theta_2 - \\ & 2\alpha_1\beta_{10}\beta_2^2\beta_{30}^2\theta_2 + \pi_0\pi_2\alpha_2\beta_1\beta_{10}\beta_2\beta_{30}^2\theta_1\theta_2 + \alpha_2\beta_1\beta_2\beta_3^2\beta_{30}\theta_1\theta_3 - \\ & \alpha_0\beta_1\beta_{20}\beta_3^2\beta_{30}\theta_1\theta_3 + \pi_0\pi_3\alpha_3\beta_1^2\beta_{20}\beta_3\beta_{30}\theta_1^2\theta_3 + 2\alpha_3\beta_2^2\beta_3^3\theta_2\theta_3 - \\ & 2\alpha_1\beta_2^2\beta_3^2\beta_{30}\theta_2\theta_3 + \pi_0\pi_2\alpha_2\beta_1\beta_2\beta_3^2\beta_{30}\theta_1\theta_2\theta_3) - \alpha_2\alpha_3\beta_1\beta_2\beta_3\beta_{30}\theta_1 + \\ & \alpha_0\alpha_3\beta_1\beta_{20}\beta_3\beta_{30}\theta_1 + \alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2\beta_{30}^2\theta_1 - \alpha_0\alpha_1\beta_1\beta_{20}\beta_{30}^2\theta_1 - \\ & \pi_0\pi_3\alpha_3^2\beta_1^2\beta_{20}\beta_{30}\theta_1^2 - \pi_0\pi_2\alpha_2^2\beta_1^2\beta_{30}^2\theta_1^2 + q\beta_1^2\beta_{20}\beta_{30}^2\theta_1^2 - \\ & \alpha_3^2\beta_2^2\beta_3^2\theta_2 + 2\alpha_1\alpha_3\beta_2^2\beta_3\beta_{30}\theta_2 - \alpha_1^2\beta_2^2\beta_{30}^2\theta_2 - \\ & \pi_0\pi_2\alpha_2\alpha_3\beta_1\beta_2\beta_3\beta_{30}\theta_1\theta_2 + \pi_0\pi_2\alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2\beta_{30}^2\theta_1\theta_2 = 0. \end{aligned}$$

Untuk mendapatkan nilai  $A$ , pilih akar  $A$  positif dari penyelesaian persamaan kuadrat tersebut yang selanjutnya dinotasikan  $A_6^*$ . Dengan menggunakan nilai  $A_6^*$  dalam persamaan  $N, M, Z$  dan  $S$  maka diperoleh nilai-nilai positif  $N_6^*, M_6^*, Z_6^*$  dan  $S_6^*$ . Selanjutnya nilai  $A_6^*, M_6^*$  dan  $S_6^*$  disubstitusikan pada persamaan (3.15) sehingga diperoleh nilai  $C$  positif yang dinotasikan dengan  $C_6^*$ .

### 3.2 Analisis Kestabilan

Pada bagian ini, akan dilakukan analisis untuk melihat sifat kestabilan pada masing-masing titik tetap. Dengan melakukan pelineran pada sistem persamaan (2.1) diperoleh matriks *Jacobi* sebagai berikut:

$$J = \begin{pmatrix} l_{11} & -\beta_1 N & -\beta_2 N & 0 & \pi_0 \delta & 0 \\ \theta_1 \beta_1 A & l_{22} & 0 & -\beta_3 A & 0 & 0 \\ \theta_2 \beta_2 M & 0 & l_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \theta_3 \beta_3 Z & 0 & l_{44} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_1 \pi_1 & \alpha_2 \pi_2 & \alpha_3 \pi_3 & -\delta & 0 \\ 0 & \lambda_{11} & \lambda_{22} & 0 & -\delta_1 & -\alpha_4 \end{pmatrix}$$

di mana:

$$l_{11} = -\alpha_0 - \beta_1 A - \beta_2 M, l_{22} = -\alpha_1 - 2\beta_{10} A - \beta_3 Z + \theta_1 \beta_1 N,$$

$$l_{33} = -\alpha_2 - 2\beta_{20} M + \theta_2 \beta_2 N, l_{44} = -\alpha_3 - 2\beta_{30} Z + \theta_3 \beta_3 A$$

Menurut Tu [7], sistem akan stabil jika nilai eigen dari matriks *Jacobi* semuanya bernilai real negatif dan bersifat tidak stabil jika minimal ada satu nilai eigen dari matriks  $J_{(E_i)}$  yang positif. Misalkan  $J_{(E_i)}$  adalah matriks *Jacobi* dari titik tetap  $E_i$  dimana  $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ . Untuk matriks  $J_{(E_1)}$  diperoleh empat nilai eigen yang negatif dan dua lainnya yaitu  $\frac{-\alpha_0 \alpha_1 + q \beta_1 \theta_1}{\alpha_0}$  dan  $\frac{-\alpha_0 \alpha_2 + q \beta_2 \theta_2}{\alpha_0}$  bergantung pada nilai parameter. Untuk matriks  $J_{(E_2)}$  diperoleh dua nilai eigen yang negatif dan empat lainnya bergantung pada nilai parameter. Untuk matriks  $J_{(E_3)}, J_{(E_4)}, J_{(E_5)}$  dan  $J_{(E_6)}$  masing-masing diperoleh satu nilai eigen yang negatif dan lima lainnya bergantung pada nilai parameter.

Berdasarkan hasil analisis tersebut, sifat kestabilan dari masing-masing titik tetap belum dapat dikatakan stabil atau tidak. Sifat kestabilan titik tetap dari model akan ditentukan dengan melakukan simulasi numerik pada bagian selanjutnya.

### 3.3 Simulasi Numerik

Untuk mengetahui sifat kestabilan dari masing-masing titik tetap dilakukan perhitungan numerik dengan memilih nilai parameter dalam sistem (2.1). Nilai parameter yang digunakan dalam simulasi ini bersumber dari [6], [5] dan [8].

$$\begin{aligned} q &= 0.5 \text{ mg l}^{-1} \text{ hari}^{-1}, q_c = 0.3 \text{ mg l}^{-1} \text{ hari}^{-1}, \alpha_0 = 0.005 \text{ hari}^{-1}, \\ \alpha_1 &= 0.025 \text{ hari}^{-1}, \alpha_2 = 0.02 \text{ hari}^{-1}, \alpha_3 = 0.5 \text{ hari}^{-1}, \alpha_4 = 0.01 \text{ hari}^{-1}, \\ \beta_1 &= 0.4 \text{ lmg}^{-1} \text{ hari}^{-1}, \beta_2 = 0.6 \text{ lmg}^{-1} \text{ hari}^{-1}, \beta_3 = 1 \text{ lmg}^{-1} \text{ hari}^{-1}, \\ \beta_{10} &= 0.002 \text{ lmg}^{-1} \text{ hari}^{-1}, \beta_{20} = 0.004 \text{ lmg}^{-1} \text{ hari}^{-1}, \beta_{30} = 2 \text{ lmg}^{-1} \text{ hari}^{-1}, \end{aligned}$$

$$\lambda_{11} = 0.02 \text{ hari}^{-1}, \lambda_{22} = 0.02 \text{ hari}^{-1}, \delta = 0.04 \text{ hari}^{-1}, \delta_1 = 0.06 \text{ hari}^{-1}, \\ \pi_0 = 0.02, \pi_1 = 0.9, \pi_2 = 0.9, \pi_3 = 0.9, \theta_1 = 0.9, \theta_2 = 0.9, \theta_3 = 1$$

Nilai dari masing-masing titik tetap dapat diperoleh dengan menggunakan nilai parameter di atas sehingga diperoleh:

$$E_1 = (100, 0, 0, 0, 0, 30)$$

$$E_2 = (0.0994, 0, 8.4234, 0, 3.7905, 24.1036)$$

$$E_3 = (0.1253, 10.0539, 0, 0, 5.6553, 16.1759)$$

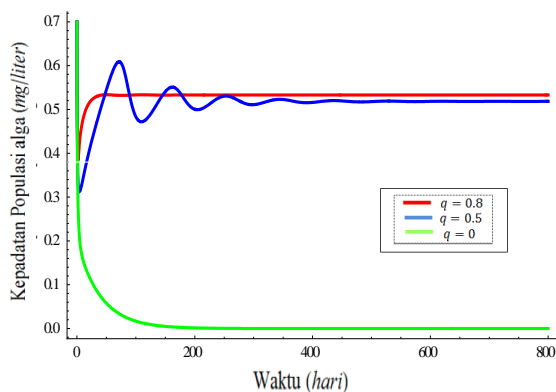
$$E_4 = (1.0422, 1.1956, 0, 0.3478, 4.5855, 4.8784)$$

$$E_5 = (0.0892, 3.5553, 7.0415, 0, 5.1685, 20.1825)$$

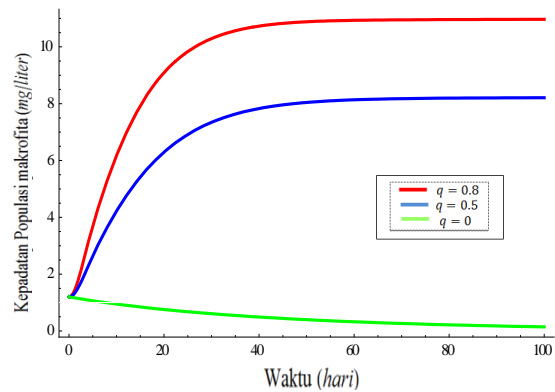
$$E_6 = (0.0979, 0.5184, 8.2149, 0.0092, 4.0918, 22.9156).$$

Pelinearan dan perhitungan terhadap sistem (2.1) memperoleh matriks Jacobian dan nilai eigen untuk masing-masing titik tetap. Selanjutnya dapat disimpulkan bahwa satu dari enam titik tetap tersebut yaitu  $E_6$  memiliki sifat stabil karena semua nilai eigennya bernilai negatif sedangkan lima titik tetap lainnya tidak stabil karena terdapat satu atau dua nilai eigennya yang positif.

Pengaruh laju masuknya nutrisi ( $q$ ) di badan air terhadap variabel  $A, M, S$  dan  $C$  disajikan pada Gambar 2-6. Parameter yang digunakan sama seperti sebelumnya kecuali nilai  $q$  yang dibuat bervariasi. Gambar 2, 3, 4, 5, dan 6 menunjukkan bahwa jika laju masuknya nutrisi meningkat maka populasi *alga*, *makrofita*, *zooplankton* dan kepadatan *detritus* juga meningkat sedangkan konsentrasi oksigen terlarut menurun. Selain itu, dapat kita lihat juga bahwa jika laju masuknya nutrisi di badan air adalah nol yaitu  $q = 0$  maka populasi *alga*, *makrofita*, *zooplankton* dan kepadatan *detritus* cenderung nol setelah periode waktu yang singkat sedangkan konsentrasi oksigen terlarut cenderung menuju nilai maksimum.

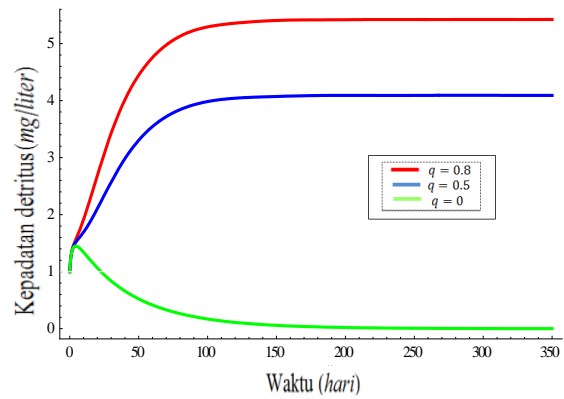
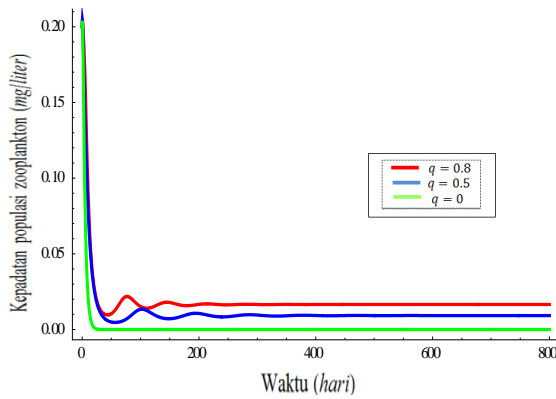


Gambar 2 Populasi *alga* terhadap  $t$  dengan nilai  $q$  berbeda



Gambar 3 Populasi *makrofita* terhadap  $t$  dengan nilai  $q$  berbeda

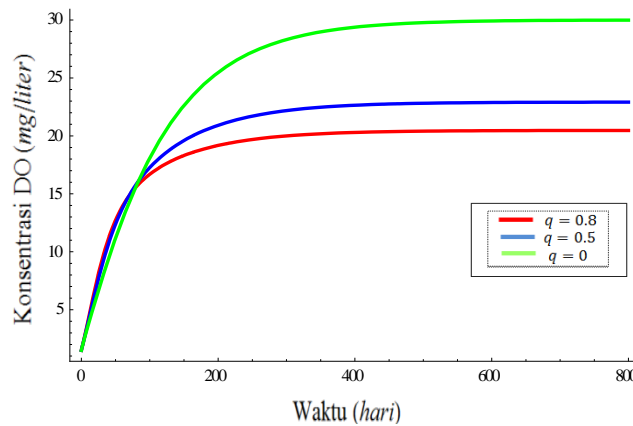




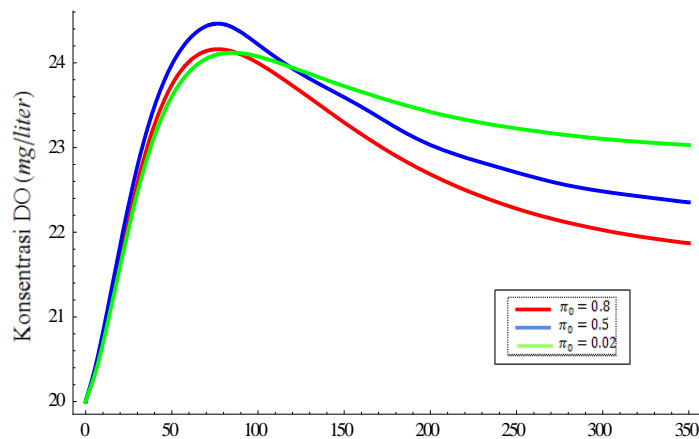
Gambar 4 Populasi *zooplankton* terhadap  $t$  dengan nilai  $q$  berbeda

Gambar 5 Kepadatan *detritus* terhadap  $t$  dengan nilai  $q$  berbeda

Gambar 7 menunjukkan bahwa jika laju perubahan *detritus* menjadi *nutrient* meningkat maka konsentrasi oksigen terlarut menurun. Pada awalnya konsentrasi oksigen terlarut tidak terlalu berbeda untuk setiap nilai  $\pi_0$ . Ketika  $t > 300$  penurunan konsentrasi oksigen terlarut sudah terlihat jelas dimana untuk  $\pi_0 = 0.02, 0.5$  dan  $0.8$  konsentrasi oksigen terlarut masing-masing mendekati nilai 23.151, 22.329 dan 21.872. Hal ini sesuai fakta bahwa dengan banyaknya *detritus* yang terbentuk di dalam badan air maka akan semakin banyak pula oksigen terlarut yang terpakai dalam proses biokimia untuk mengubah *detritus* menjadi *nutrien*, sehingga hal ini menyebabkan turunnya konsentrasi oksigen terlarut ketika laju perubahan *detritus* *meningkat*.



Gambar 6 Perubahan konsentrasi oksigen terlarut terhadap  $t$  dengan nilai  $q$  berbeda



Gambar 7 Perubahan konsentrasi oksigen terlarut terhadap  $t$  dengan nilai  $\pi_0$

#### 4 SIMPULAN

Secara umum model yang dihasilkan dapat menunjukkan perilaku perubahan kandungan oksigen terlarut dalam badan air yang mengalami eutrofikasi. Perubahan nilai oksigen terlarut ini disebabkan oleh banyak faktor diantaranya adanya *nutrient*, *alga*, *makrofita*, *zooplankton* dan *detritus*. Rincian hasil-hasil utama dalam jurnal ini disimpulkan pada uraian berikut:

1. Hasil analisis model memperoleh enam titik tetap.
2. Simulasi numerik menunjukkan bahwa dari enam titik tetap, satu diantaranya stabil dan lima lainnya tidak stabil.
3. Simulasi juga menunjukkan bahwa jika laju masuknya nutrisi ke dalam badan air mengalami kenaikan maka populasi *alga*, *makrofita*, *zooplankton* dan *detritus* juga meningkat sedangkan konsentrasi oksigen terlarut menurun.
4. Laju pengubahan *detritus* menjadi *nutrien* juga mempunyai pengaruh terhadap konsentrasi oksigen terlarut dimana jika laju pengubahan *detritus* menjadi nutrisi meningkat, maka konsentrasi oksigen terlarut di badan air menurun.
5. Simulasi menunjukkan bahwa jika laju masuknya nutrisidi badan air adalah nol maka populasi *alga*, *makrofita*, *zooplankton* dan kepadatan *detritus* juga cenderung menuju nol setelah periode waktu yang singkat sedangkan konsentrasi oksigen terlarut cenderung menuju nilai maksimum.
6. Dengan adanya hasil tersebut, kita dapat mengatakan bahwa agar oksigen terlarut tersedia dalam jumlah yang cukup dalam badan air maka beberapa mekanisme kontrol harus diterapkan. Misalnya dengan mengurangi beban masukan nutrisi ke dalam badan air, melakukan proses reaerasi dan lain sebagainya.

**DAFTAR PUSTAKA**

- [1] [OECD] Organization for Economic Cooperation and Development. 1982. *Eutrophication of Waters*. OECD Publication Office. Paris.
- [2] Kristanto P. 2004. *Ecological Industry*. Surabaya: Andi Publisher.
- [3] Soeprbowati, Retnaningsih T, Hadisusanto, Suwarno. 2012. *Swamp Lakes Water Quality Dizziness from time to time*. Semarang: Diponegoro University and the University of Gajah Mada.
- [4] Voinov A, Tonkikh AP. 1987. Qualitative model of eutrophication in macrophyte lakes, *Ecology Model*. 35: 211–226.
- [5] Misra AK. 2007. Mathematical Modeling and Analysis of Eutrophication of Water Bodies Caused by Nutrients, *Nonlinear Anal. Model. Control*. 12(4): 511–524.
- [6] Misra AK. 2010. Modeling the depletion of dissolved oxygen in a lake due to submerged macrophytes. *Nonlinear Analysis: Modelling and Control*. 15(2): 185-198.
- [7] Tu PNV. 1994. *Dinamical System: An Introduction with Applications in Economics and Biology*. New York: Springer-Verlag.
- [8] Amemiya T, Enomoto T, Rossberg, Yamamoto T, Inamori Y, Itoh K. 2007. Stability and dynamical behavior in a lake-model and implications for regime shifts in real lakes, *Ecology Model*. 206: 54–62.

