

# PROYEKSI PENDUDUK MULTIREGIONAL UNTUK TIGA WILAYAH DI INDONESIA

R. S. SUKANDAR<sup>1</sup>, H. SUMARNO<sup>2</sup>, E. H. NUGRAHANI<sup>3</sup>

## Abstrak

Indonesia memiliki beberapa masalah kependudukan yaitu laju pertumbuhan penduduk yang pesat dan penyebaran penduduk yang tidak merata. Proyeksi penduduk dapat memberikan informasi mengenai penyebaran dan laju pertumbuhan penduduk pada periode mendatang yang dipengaruhi oleh migrasi, kematian dan kelahiran. Tujuan dari karya ilmiah ini adalah untuk menyajikan suatu proyeksi penduduk multiregional Indonesia yang dibagi menjadi tiga wilayah yaitu Pulau Sumatera, Pulau Jawa dan pulau lainnya. Dengan menggunakan data Sensus Penduduk tahun 2010, proyeksi penduduk dilakukan melalui nilai tingkat bertahan hidup dan nilai intensitas kelahiran bayi yang disusun menjadi suatu matriks operator pertumbuhan. Model kontinu bagi tingkat bertahan hidup disusun dari penjumlahan dua buah fungsi eksponensial. Sedangkan, model kontinu bagi tingkat kelahiran merupakan modifikasi dari fungsi Beta. Hasil dari penelitian ini menunjukkan bahwa dalam waktu jangka panjang, proporsi penduduk Indonesia yang berada di Pulau Jawa akan menurun dan mencapai stabil pada 41%. Sementara itu proporsi penduduk di Pulau Sumatera dan pulau lainnya akan meningkat dan mencapai stabil berturut-turut pada 26% dan 33%. Pada akhirnya laju pertumbuhan penduduk Indonesia menjadi 0.641% per tahun, yaitu ketika proporsi penduduk berdasarkan komposisi umur pada setiap wilayah mencapai kondisi stabil.

**Kata kunci:** kelahiran, proyeksi multiregional, tingkat bertahan hidup

## 1 PENDAHULUAN

Indonesia memiliki beberapa masalah kependudukan yaitu jumlah penduduk yang besar dan laju pertumbuhan penduduk yang pesat. Dari hasil Sensus Penduduk (SP) yang dilakukan oleh Badan Pusat Statistik (BPS) pada tahun 2010, tercatat bahwa laju pertumbuhan penduduk Indonesia sebesar 1.49% per tahun dengan jumlah penduduk 237,641,326 jiwa dimana 59.12% penduduk berada di Pulau Jawa, 21.31% di Pulau Sumatera dan 19.57% di pulau lainnya [4]. Penyebaran penduduk yang tidak merata akan mengakibatkan terjadinya

---

<sup>1</sup> Mahasiswa S2 Program Studi Matematika Terapan, Sekolah Pascasarjana IPB, Jalan Meranti Kampus IPB Dramaga Bogor, 16680. Email: [rani.s.sukandar@gmail.com](mailto:rani.s.sukandar@gmail.com)

<sup>2</sup> Departemen Matematika, Fakultas Ilmu Matematika dan Pengetahuan Alam, Jalan Meranti Kampus IPB Dramaga Bogor, 16680. E-mail: [hadisumarno@yahoo.com](mailto:hadisumarno@yahoo.com)

<sup>3</sup> Departemen Matematika, Fakultas Ilmu Matematika dan Pengetahuan Alam, Jalan Meranti Kampus IPB Dramaga Bogor, 16680. E-mail: [e\\_nugrahani@ipb.ac.id](mailto:e_nugrahani@ipb.ac.id)

perbedaan kesejahteraan sosial antarwilayah.

Diperlukan adanya proyeksi penduduk secara multiregional beserta analisis kestabilan terhadap laju pertumbuhan penduduk pada periode mendatang. Hal tersebut dapat membantu para ahli untuk memprediksi langkah yang harus diambil dalam menghadapi jumlah populasi yang akan datang dengan melakukan tingkat pembangunan yang efektif dan efisien untuk setiap wilayah di Indonesia.

Berdasarkan data migran seumur hidup hasil SP 2010, tercatat bahwa Pulau Jawa adalah wilayah yang paling banyak mengeluarkan migran, selanjutnya Pulau Sumatera yang menduduki urutan kedua. Banyaknya migran keluar dari Pulau Jawa adalah 6,306,304 jiwa dengan 59.67% migran menuju Pulau Sumatera, sedangkan banyaknya migran keluar dari Pulau Sumatera adalah 2,440,471 jiwa dengan 91.56% migran menuju Pulau Jawa [5]. Karena itu dalam kajian ini, wilayah Indonesia dibagi menjadi tiga yaitu Pulau Sumatera, Pulau Jawa, dan pulau lainnya. Secara umum penelitian ini bertujuan untuk melakukan proyeksi multiregional dan menganalisis kestabilan laju pertumbuhan penduduk Indonesia.

## **2 LIFE TABLE UNIREGIONAL**

Penyusunan *life table* Uniregional diperlukan untuk memperoleh nilai tingkat kematian penduduk. *Life table* penduduk Indonesia mengacu pada *life table* Coale-Demeny model barat yang memiliki karakteristik tingkat kematian bayi yang tinggi [7]. Untuk melihat pola *survival* penduduk secara kontinu, kajian ini melihat kesesuaian antara plot tingkat *survival* penduduk berdasarkan kelompok umur terhadap model *survival* yang diperkenalkan oleh Makeham [2]. Namun berdasarkan penyuaian data, model tersebut kurang mengikuti pola *survival* penduduk terutama pada umur dibawah 5 tahun. Sehingga untuk mendekati pola *survival* penduduk, kajian ini menawarkan suatu model lain yang merupakan penjumlahan dari dua buah fungsi eksponensial dengan parameter  $a_1, a_2, b_1, b_2, c, c_1$  dan  $d$  ( $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, d > 0$ ) yang dirumuskan oleh persamaan berikut ( $i = 1$ : Pulau Sumatera,  $2$ : Pulau Jawa,  $3$ : pulau lainnya):

$$Survival_i(x) = c + a_1 e^{-b_1 x} + a_2 e^{(-b_2(x-c_1) - e^{d(x-c_1)})} \quad ; x \geq 0.$$

Berdasarkan hasil pengepasan model menggunakan *software Mathematica 10.3*, diperoleh parameter untuk setiap wilayah yang tersedia pada Tabel 1.

Tabel 1  
Parameter fungsi *Survival*

Parameter	Pulau Sumatera	Pulau Jawa	Pulau lainnya
<i>c</i>	- 0.0369	- 0.0315	- 0.0527
<i>a</i> <sub>1</sub>	0.0271	0.0239	0.0361
<i>b</i> <sub>1</sub>	2.5786	2.6650	2.3573
<i>a</i> <sub>2</sub>	0.9666	0.9698	0.9568
<i>b</i> <sub>2</sub>	0.0005	0.0005	0.0008
<i>c</i> <sub>1</sub>	80.7728	81.0333	80.3321
<i>d</i>	0.1000	0.1018	0.0959

Menurut Brown [6] *life table* adalah suatu gambaran yang menunjukkan riwayat kematian penduduk pada waktu tertentu yang meliputi:

$l_x$  : jumlah orang yang bertahan hidup dari lahir hingga tepat umur ke- $x$ , di mana  $l_x = l_0 \times Survival(x)$  dengan  $l_0$  merupakan asumsi jumlah penduduk awal yang lahir,

${}_5d_x$  : banyaknya kematian antara umur  $x$  hingga umur  $x + 5$ , di mana

$${}_5d_x = l_x - l_{x+5},$$

${}_5L_x$  : waktu hidup yang akan dijalani oleh penduduk berumur  $x$  hingga mencapai umur  $x + 5$ , di mana  ${}_5L_x = \int_x^{x+5} l_0 \times Survival(s) ds$ ,

$T_x$  : total waktu hidup yang akan dijalani oleh penduduk yang mencapai umur  $x$ , di mana  $T_x = {}_5L_x + {}_5L_{x+5} + {}_5L_{x+10} + \dots$ ,

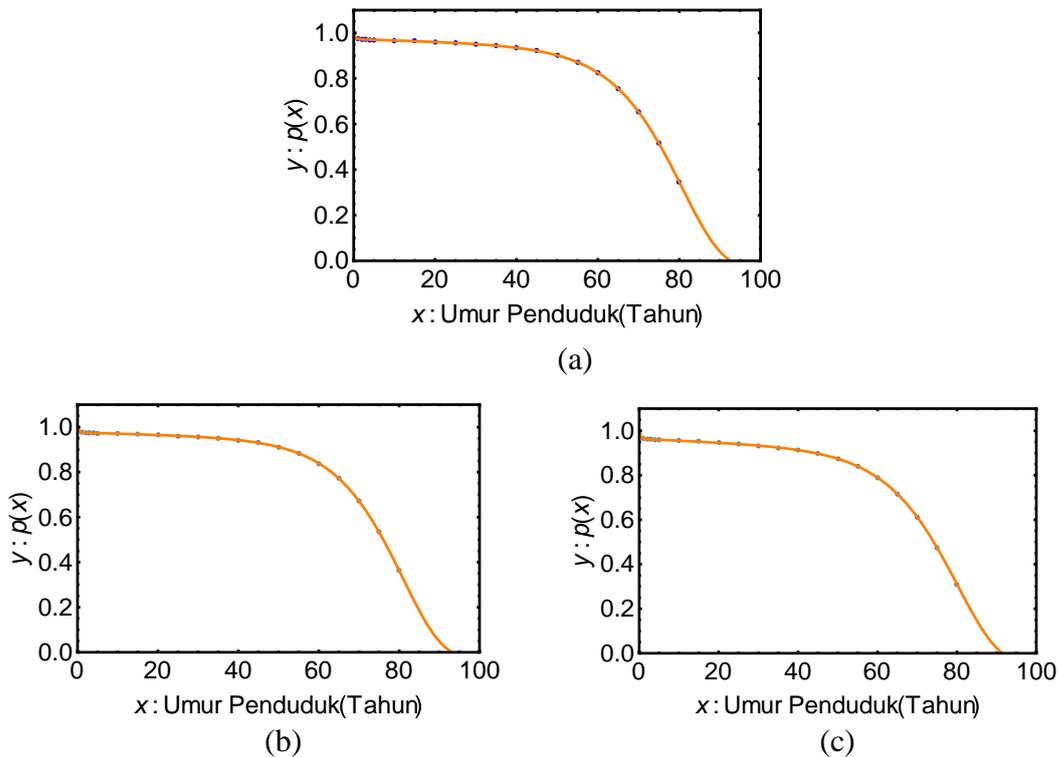
${}_5m_x$  : tingkat kematian bagi penduduk pada kelompok umur  $x$  sampai  $x + 5$ , di

$$\text{mana } {}_5m_x = \frac{{}_5d_x}{{}_5L_x},$$

$e_x^0$  : angka harapan hidup bagi penduduk umur  $x$ , di mana  $e_x^0 = \frac{T_x}{l_x}$ .

Jika formula *life table* model kontinu disetarakan dengan model diskret, maka dapat diperoleh nilai proporsi lima tahunan di wilayah  $i$   $t_i(x)$  pada model diskret melalui hasil perhitungan  ${}_5L_x$  yang diperoleh dari model kontinu. Formula yang digunakan adalah  $t_i(x) = ({}_5L_x - 5 l_x) / (l_{x+n} - l_x)$ .

Perbandingan antara pola *survival* penduduk dengan plot fungsi *survival* untuk setiap wilayah dapat dilihat pada Gambar 1.



Gambar 1 Perbandingan antara pola *survival* penduduk dengan plot fungsi *survival* untuk setiap wilayah. (a) Sumatera, (b) Jawa, (c) lainnya

Gambar 1 memperlihatkan bahwa model *survival* yang merupakan penjumlahan dari dua buah fungsi eksponensial mengikuti pola *survival* penduduk untuk setiap wilayah. Tajamnya penurunan pola *survival* bagi penduduk umur 0-1 tahun menunjukkan bahwa tingkat kematian bayi yang tinggi. Tajamnya penurunan pola *survival* kembali terjadi setelah melewati umur 65 tahun.

Berdasarkan hasil penyusunan *life table* uniregional, penduduk Pulau Sumatera, Pulau Jawa dan pulau lainnya berturut-turut memiliki angka harapan hidup 70.69 tahun, 71.58 tahun dan 68.47 tahun. Berdasarkan data hasil Sensus Penduduk tahun 2010 [4], penduduk Pulau Sumatera, Pulau Jawa dan pulau lainnya berturut-turut memiliki angka harapan hidup 70.83 tahun, 71.72 tahun dan 68.63 tahun. Terlihat bahwa model *survival* yang merupakan penjumlahan dari dua buah fungsi eksponensial menghasilkan nilai angka harapan hidup yang tidak jauh berbeda dengan data sebenarnya untuk setiap wilayah.

Berdasarkan hasil perhitungan, diperoleh nilai tingkat kematian penduduk untuk setiap kelompok umur. Nilai tersebut tersedia pada Tabel 2.

Tabel 2  
Tingkat kematian penduduk

Kelompok Umur	$M_{d1}(x)$	$M_{d2}(x)$	$M_{d3}(x)$
0-4	0.0062	0.0054	0.0083
5-9	0.0006	0.0005	0.0009
10-14	0.0007	0.0006	0.0010
15-19	0.0008	0.0007	0.0010
20-24	0.0009	0.0008	0.0012
25-29	0.0011	0.0009	0.0014
30-34	0.0014	0.0012	0.0018
35-39	0.0020	0.0018	0.0025
40-44	0.0029	0.0026	0.0035
45-49	0.0043	0.0040	0.0052
50-54	0.0068	0.0063	0.0079
55-59	0.0108	0.0102	0.0123
60-64	0.0175	0.0166	0.0195
65-69	0.0286	0.0274	0.0312
70-74	0.0471	0.0455	0.0505
75-79	0.0784	0.0762	0.0833
80-84	0.1345	0.1305	0.1442
85+	0.2599	0.2452	0.3082

Tabel 2 memperlihatkan bahwa tingkat kematian tinggi terdapat pada penduduk pulau lainnya (wilayah 3) untuk setiap kelompok umur. Untuk setiap wilayah, kelompok umur 0-4 tahun memiliki tingkat kematian yang lebih tinggi daripada kelompok umur 5-9 tahun. Untuk setiap wilayah, tingkat kematian meningkat perlahan pada kelompok umur selanjutnya hingga pada kelompok umur 50-59 tahun, namun tingkat kematian mulai meningkat tajam setelah melewati kelompok umur 50-59 tahun.

### 3 ARUS MIGRASI DAN PELUANG TRANSISI PENDUDUK

Rogers menyatakan bahwa pengukuran migrasi yang berperan dalam kajian multiregional hanya migrasi keluar [11]. Penduduk yang pernah pindah dalam kurun waktu lima tahun terakhir disebut oleh Badan Pusat Statistik sebagai migran risen [3]. Data migran risen diperoleh dari hasil Survei Penduduk Antar Sensus (SUPAS) yang dilakukan oleh BPS pada tahun 2015. Banyaknya migran risen di Pulau Sumatera yang berasal dari Pulau Jawa adalah 317,750 jiwa, sedangkan yang berasal dari pulau lainnya adalah 34,666 jiwa. Banyaknya migran risen di Pulau Jawa yang berasal dari Pulau Sumatera adalah 319,760 jiwa, sedangkan yang berasal dari pulau lainnya adalah 248,587 jiwa. Banyaknya

migran risen di pulau lainnya yang berasal dari Pulau Sumatera adalah 39,774 jiwa, sedangkan yang berasal dari Pulau Jawa adalah 320,804 jiwa. Model migrasi yang ditawarkan oleh Rogers [10] adalah sebagai berikut ( $k = 1$ : Jawa Bali, 2: Luar Jawa Bali):

$$M_k(x) = a_1 \exp[-\alpha_1 x] + a_2 \exp[-\alpha_2 (x - \mu_2) - \exp[-\lambda_2 (x - \mu_2)]] \\ + a_3 \exp[-\alpha_3 (x - \mu_3) - \exp[-\lambda_3 (x - \mu_3)]] + c.$$

Nilai parameter diperoleh oleh Muslimah [9] untuk wilayah Pulau Jawa yaitu  $a_1 = 5.0819 \times 10^{-2}$ ,  $a_2 = 1.2608 \times 10^{-2}$ ,  $a_3 = 1.4380 \times 10^{-3}$ ,  $\alpha_1 = 7.6472 \times 10^{-4}$ ,  $\alpha_2 = 1.0087 \times 10^{-1}$ ,  $\alpha_3 = 0.14497$ ,  $\mu_2 = 18.5611$ ,  $\mu_3 = 77.0189$ ,  $\lambda_2 = 0.85742$ ,  $\lambda_3 = 7.0484 \times 10^{-2}$  dan  $c = -4.7609 \times 10^{-2}$ . Sedangkan untuk wilayah Luar Pulau Jawa yaitu  $a_1 = 8.0820 \times 10^{-3}$ ,  $a_2 = 2.9128 \times 10^{-2}$ ,  $a_3 = 3.1272 \times 10^{-3}$ ,  $\alpha_1 = 6.2474 \times 10^{-2}$ ,  $\alpha_2 = 7.5304 \times 10^{-2}$ ,  $\alpha_3 = 0.15471$ ,  $\mu_2 = 19.4569$ ,  $\mu_3 = 75.3528$ ,  $\lambda_2 = 0.36526$ ,  $\lambda_3 = 7.2969 \times 10^{-2}$  dan  $c = -5.8655 \times 10^{-4}$ . Parameter-parameter tersebut diperoleh dari data tahun 2005 dan 2000 yang mencatat bahwa proporsi penduduk yang keluar dari wilayah Pulau Jawa adalah sebesar 0.00422837 dan proporsi penduduk yang keluar dari wilayah Luar Pulau Jawa adalah sebesar 0.00765911. Sehingga model migrasi keluar dari  $i$  ke  $j$  ( $i, j = 1$ : Pulau Sumatera, 2: Pulau Jawa, 3: pulau lainnya) adalah:

$$M_{2j}(x) = \frac{\text{proporsi migran keluar dari Pulau Jawa ke wilayah } j}{0.00422837} M(x)$$

$$M_{ij}(x) = \frac{\text{proporsi migran keluar dari } i \text{ (} i \neq 2 \text{) ke } j}{0.00765911} M(x)$$

Pendugaan yang digunakan untuk mengetahui arus migrasi dari  $i$  ke  $j$  pada kelompok umur  $[x, x + 5)$  adalah  $M_{ij}(x) = \frac{1}{5} \times \int_x^{x+5} M_{ij}(s) ds$ . Tingkat keluarnya penduduk dari suatu wilayah yang disebabkan karena adanya kematian dan migrasi keluar dapat diperoleh melalui persamaan  $M_{ii}(x) = M_{id}(x) + \sum_{j=1, j \neq i}^3 M_{ij}(x)$ , dengan  $M_{id}(x)$  adalah tingkat kematian di wilayah  $i$  bagi penduduk kelompok umur  $x$  yang nilainya dapat dilihat pada Tabel 2.

Untuk melihat kesesuaian model yang digunakan, akan dicari banyaknya migran lima tahunan yang berpindah dari suatu wilayah ke wilayah yang lain. Perhitungan dilakukan terhadap data jumlah penduduk yang dikalikan dengan arus migrasi berdasarkan kelompok umur yang kemudian dijumlahkan untuk memperoleh total penduduk yang berpindah antarwilayah. Sehingga didapatkan bahwa banyaknya migran lima tahunan di Pulau Sumatera yang berasal dari Pulau Jawa adalah 302,824 jiwa, sedangkan yang berasal dari pulau lainnya adalah 33,587 jiwa. Banyaknya migran risen di Pulau Jawa yang berasal dari Pulau

Sumatera adalah 313,728 jiwa, sedangkan yang berasal dari pulau lainnya adalah 240,846 jiwa. Banyaknya migran risen di pulau lainnya yang berasal dari Pulau Sumatera adalah 39,009 jiwa, sedangkan yang berasal dari Pulau Jawa adalah 305,735 jiwa. Terlihat bahwa jumlah migran lima tahunan yang diperoleh dari model mendekati jumlah migran lima tahunan (risen) antarwilayah hasil SUPAS pada tahun 2015. Hal tersebut menunjukkan bahwa model yang digunakan untuk melihat arus migrasi antarwilayah sudah cukup baik.

Rogers [11] telah menyusun formulasi untuk menghitung peluang transisi  $P(x)$  untuk interval lima tahunan dengan persamaan:

$$P(x) = \left[ I + \frac{5}{2}A(x) \right]^{-1} \left[ I - \frac{5}{2}A(x) \right],$$

dengan

$$A(x) = \begin{bmatrix} M_{11}(x) & -M_{21}(x) & -M_{31}(x) \\ -M_{12}(x) & M_{22}(x) & -M_{32}(x) \\ -M_{13}(x) & -M_{23}(x) & M_{33}(x) \end{bmatrix}.$$

Namun dalam kajian ini, peluang transisi penduduk antarwilayah dihitung menggunakan perumuman dari formula yang diperkenalkan oleh Rogers tersebut, sehingga menjadi:

$$P(x) = [I + A_t(x)]^{-1}[I - A_{5-t}(x)] = \begin{bmatrix} p_{11}(x) & p_{21}(x) & p_{31}(x) \\ p_{12}(x) & p_{22}(x) & p_{32}(x) \\ p_{13}(x) & p_{23}(x) & p_{33}(x) \end{bmatrix},$$

dengan

$$A_t(x) = \begin{bmatrix} t_1(x) M_{11}(x) & -t_2(x) M_{21}(x) & -t_3(x) M_{31}(x) \\ -t_1(x) M_{12}(x) & t_2(x) M_{22}(x) & -t_3(x) M_{32}(x) \\ -t_1(x) M_{13}(x) & -t_2(x) M_{23}(x) & t_3(x) M_{33}(x) \end{bmatrix},$$

$$A_{5-t}(x) = \begin{bmatrix} (5 - t_1(x)) M_{11}(x) & -(5 - t_2(x)) M_{21}(x) & -(5 - t_3(x)) M_{31}(x) \\ -(5 - t_1(x)) M_{12}(x) & (5 - t_2(x)) M_{22}(x) & -(5 - t_3(x)) M_{32}(x) \\ -(5 - t_1(x)) M_{13}(x) & -(5 - t_2(x)) M_{23}(x) & (5 - t_3(x)) M_{33}(x) \end{bmatrix},$$

di mana  $p_{ij}(x)$  adalah peluang individu hidup di wilayah  $i$  pada tepat umur  $x$  dan hidup lima tahun setelahnya di wilayah  $j$  dan  $I$  adalah matriks identitas  $3 \times 3$ .

#### 4 SURVIVORSHIP

Peluang transisi penduduk merupakan dasar perhitungan dalam menyusun *life table* multiregional. Informasi mengenai total jumlah penduduk yang lahir di wilayah  $i$  dan ketika berumur  $x$  berada di wilayah  $j$  dapat diperoleh melalui:

$${}_iL_j(x) = (5 - t_i(x)) \times {}_iL_j(x) + t_i(x) \times {}_iL_j(x+5),$$

dengan  ${}_iL_j(x+5) = p_{jj}(x) \times {}_iL_j(x) + \sum_{k \neq j} p_{kj}(x) \times {}_iL_k(x)$  di mana  ${}_iL_j(x)$  adalah banyaknya penduduk yang lahir di wilayah  $i$  dan berada di wilayah  $j$  tepat pada umur  $x$ . Dari nilai  ${}_iL_j(x)$ , akan didapatkan nilai *survivorship* penduduk  $S(x)$  [11] dengan menggunakan formula sebagai berikut:

$$S(x) = [L(x+5)][L(x)]^{-1} = \begin{bmatrix} s_{11}(x) & s_{21}(x) & s_{31}(x) \\ s_{12}(x) & s_{22}(x) & s_{32}(x) \\ s_{13}(x) & s_{23}(x) & s_{33}(x) \end{bmatrix},$$

dengan

$$L(x) = \begin{bmatrix} {}_{10}L_1(x) & {}_{20}L_1(x) & {}_{30}L_1(x) \\ {}_{10}L_2(x) & {}_{20}L_2(x) & {}_{30}L_2(x) \\ {}_{10}L_3(x) & {}_{20}L_3(x) & {}_{30}L_3(x) \end{bmatrix},$$

di mana  $s_{ij}(x)$  adalah proporsi penduduk dari semua umur  $x$  sampai  $x+4$  yang tinggal di daerah  $i$  pada periode  $t$  dan bertahan hingga 5 tahun yang kemudian pada umur  $x+5$  sampai  $x+9$  tinggal di wilayah  $j$  pada periode  $t+1$ . Berdasarkan perhitungan, diperoleh tingkat *survivorship* penduduk yang tersedia pada Tabel 3.

Tabel 3  
Tingkat *survivorship* penduduk

Kelompok Umur	$s_{11}(x)$	$s_{12}(x)$	$s_{13}(x)$	$s_{21}(x)$	$s_{22}(x)$	$s_{23}(x)$	$s_{31}(x)$	$s_{32}(x)$	$s_{33}(x)$
0-4	0.98117	0.01203	0.00154	0.00473	0.98597	0.00479	0.00148	0.01037	0.98062
5-9	0.97925	0.01550	0.00198	0.00741	0.98227	0.00748	0.00188	0.01313	0.98041
10-14	0.97328	0.02048	0.00268	0.01010	0.97658	0.01021	0.00253	0.01738	0.97513
15-19	0.94283	0.04677	0.00636	0.01911	0.95797	0.01938	0.00598	0.03986	0.94863
20-24	0.92199	0.06468	0.00851	0.02235	0.95074	0.02265	0.00801	0.05503	0.93048
25-29	0.93290	0.05401	0.00698	0.01598	0.96240	0.01617	0.00658	0.04584	0.93953
30-34	0.94858	0.03827	0.00489	0.01138	0.96972	0.01150	0.00462	0.03242	0.95236
35-39	0.95888	0.02605	0.00331	0.00836	0.97255	0.00844	0.00313	0.02203	0.96017
40-44	0.96270	0.01755	0.00222	0.00635	0.97120	0.00640	0.00210	0.01483	0.96184
45-49	0.95903	0.01245	0.00157	0.00510	0.96477	0.00515	0.00148	0.01051	0.95627
50-54	0.94609	0.01030	0.00130	0.00452	0.95127	0.00456	0.00122	0.00868	0.94159
55-59	0.92204	0.00959	0.00121	0.00428	0.92779	0.00432	0.00114	0.00806	0.91570
60-64	0.88363	0.00843	0.00106	0.00390	0.88992	0.00394	0.00099	0.00706	0.87512
65-69	0.82385	0.00619	0.00077	0.00314	0.83036	0.00317	0.00072	0.00514	0.81284
70-74	0.73180	0.00358	0.00038	0.00212	0.73862	0.00215	0.00040	0.00292	0.71782
75-79	0.59430	0.00149	0.00010	0.00114	0.60253	0.00114	0.00017	0.00122	0.57487
80+	0.39307	0.00040	0.00003	0.00039	0.40765	0.00030	0.00009	0.00059	0.35273

Tabel 3 memperlihatkan bahwa puncak tingkat *survivorship* penduduk terletak pada kelompok umur 20-24 tahun bagi penduduk yang melakukan perpindahan ( $i \neq j$ ). Sedangkan untuk penduduk yang menetap ( $i = j$ ), tingkat *survivorship* tertinggi terletak pada penduduk kelompok umur 0-4 tahun dan menurun perlahan hingga kelompok umur 20-24 tahun yang kemudian meningkat perlahan hingga kelompok umur 40-44 tahun. Namun setelah kelompok umur 40-44 tahun, tingkat *survivorship* penduduk yang menetap di suatu wilayah mengalami penurunan kembali. Dalam penyusunan *life table* multiregional, akan diperoleh pula informasi mengenai rata-rata lama waktu hidup yang dihabiskan oleh penduduk baik di wilayah kelahirannya maupun di wilayah lainnya.

## 5 FERTILITAS

Fertilitas menyatakan tingkat kelahiran bayi dalam suatu masyarakat. Data *Age Specific Fertility Rate* (ASFR) hasil Sensus Penduduk tahun 2010 yang tersedia pada *website* resmi Badan Kependudukan Keluarga Berencana Nasional (BKKBN) merupakan data diskret dengan plot data cenderung menjulur ke kanan [1]. Terdapat beberapa fungsi kontinu yang memiliki sifat kurva menjulur ke kanan, salah satunya adalah fungsi Gamma [8]. Untuk mendekati pola tingkat fertilitas, kajian ini melakukan modifikasi terhadap fungsi Gamma. Model ini akan melihat tingkat fertilitas perempuan di suatu wilayah mulai dari umur reproduksi terendah. Namun berdasarkan penyuaian data, model tersebut kurang mengikuti pola tingkat fertilitas penduduk terutama pada perempuan berumur lebih dari 30 tahun.

Terdapat suatu fungsi kontinu lainnya yang memiliki sifat kurva menjulur ke kanan, yaitu fungsi Beta [8] dengan parameter  $a$  dan  $b$  ( $a, b > 1$ ) yang dirumuskan oleh persamaan berikut:

$$Beta(x) = x^{a-1}(1-x)^{b-1} \quad ; \quad 0 < x < 1.$$

Untuk mendekati pola tingkat fertilitas, kajian ini menawarkan suatu model kontinu lain untuk mendekati pola tingkat fertilitas yang merupakan modifikasi dari fungsi Beta dengan parameter  $a, b, m$  dan  $M$  ( $a, b > 1$  dan  $m, M > 0$ ). Model ini akan melihat tingkat fertilitas perempuan di wilayah  $i$  dari umur reproduksi terendah  $m$  sampai umur reproduksi tertinggi  $M$ . Model tersebut dirumuskan oleh persamaan berikut:

$$F_i(x) = \left(\frac{x-m}{M-m}\right)^{a-1} \left(1 - \left(\frac{x-m}{M-m}\right)\right)^{b-1} \quad ; \quad m < x < M.$$

Berikut adalah analisis terhadap kurva model fertilitas  $F_i$ . Hal ini dilakukan untuk melihat pengaruh parameter terhadap umur penduduk ( $x_p$ ) yang memiliki tingkat fertilitas tertinggi. Turunan pertama  $F$  adalah:

$$F_i'(x) = \frac{(x-m)^{a-2}(M-x)^{b-2}}{(M-m)^{a+b-2}} [(a-1)(M-x) - (b-1)(x-m)].$$

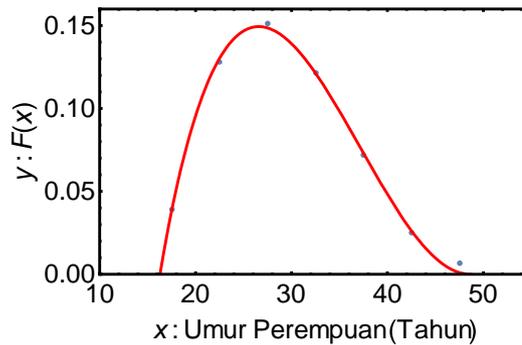
Jika  $F_i'(x) = 0$ , maka akan diperoleh:  $(a - 1)(M - x) - (b - 1)(x - m) = 0$

$$x_p = \frac{(a - 1)M + (b - 1)m}{a + b - 2}.$$

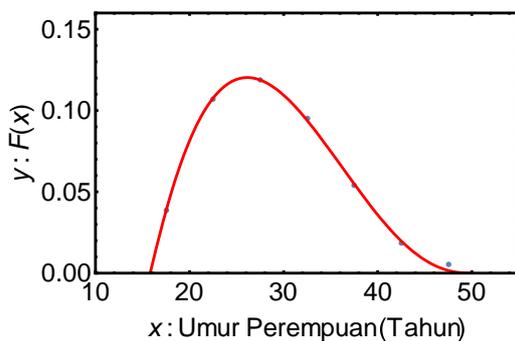
Berdasarkan hasil pengepasan data tingkat fertilitas berdasarkan kelompok umur terhadap model  $F_i$  dengan menggunakan *software Mathematica 10.3*, diperoleh parameter untuk setiap wilayah yang tersedia pada Tabel 4. Perbandingan antara pola fertilitas penduduk dengan plot fungsi  $F_i$  untuk setiap wilayah dapat dilihat pada Gambar 2.

Tabel 4  
Parameter model fertilitas  $F$

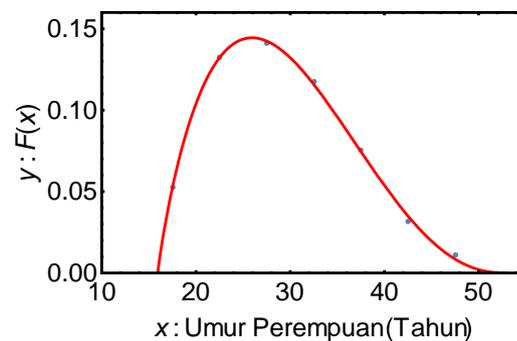
Parameter	Pulau Sumatera	Pulau Jawa	Pulau lainnya
$m$	16.3005	15.7992	15.9470
$M$	48.6944	49.9614	52.9868
$a$	1.9658	2.0454	1.8959
$b$	3.0769	3.4097	3.4212



(a)



(b)



(c)

Gambar 2 Perbandingan antara pola fertilitas penduduk dengan plot fungsi  $F$  untuk setiap wilayah. (a) Sumatera, (b) Jawa, (c) lainnya

Gambar 2 memperlihatkan bahwa model fertilitas yang merupakan modifikasi dari fungsi Pendugaan yang digunakan untuk mengetahui tingkat fertilitas penduduk wilayah  $i$  pada kelompok umur  $[x, x + 5)$  adalah  $F_i(x) = \frac{1}{5} \times \int_x^{x+5} F_i(s) ds$ . Melalui analisis puncak kurva, dapat diketahui bahwa tingkat fertilitas tertinggi bagi perempuan Pulau Sumatera, Pulau Jawa dan pulau lainnya berturut-turut terletak pada umur 26.58 tahun, 26.14 tahun dan 25.95 tahun.

Intensitas kelahiran bayi  $B(x)$  pada interval waktu tertentu didapatkan dengan menggunakan formula [11] sebagai berikut:

$$B(x) = \frac{1}{2}L(0)l(0)^{-1}[F(x) + F(x + 5) S(x)] \times p_w(x)$$

$$= \begin{bmatrix} b_{11}(x) & b_{21}(x) & b_{31}(x) \\ b_{12}(x) & b_{22}(x) & b_{32}(x) \\ b_{13}(x) & b_{23}(x) & b_{33}(x) \end{bmatrix},$$

dengan

$$F(x) = \begin{bmatrix} F_1(x) & 0 & 0 \\ 0 & F_2(x) & 0 \\ 0 & 0 & F_3(x) \end{bmatrix}, \quad l(x) = \begin{bmatrix} {}_{10}l_1(x) & {}_{20}l_1(x) & {}_{30}l_1(x) \\ {}_{10}l_2(x) & {}_{20}l_2(x) & {}_{30}l_2(x) \\ {}_{10}l_3(x) & {}_{20}l_3(x) & {}_{30}l_3(x) \end{bmatrix},$$

di mana  $b_{ij}(x)$  adalah intensitas kelahiran bayi dari wanita dalam selang umur  $x$  sampai  $x + 4$  yang pada saat berumur  $x$  tinggal di wilayah  $i$  dan pada saat berumur  $x + 5$  tinggal di wilayah  $j$ ,  $p_w(x)$  adalah proporsi wanita kelompok umur  $x$  serta  $F_i(x)$  adalah tingkat fertilitas perempuan kelompok umur  $x$  di wilayah  $i$ . Hasil perhitungan tingkat intensitas kelahiran bayi berdasarkan kelompok umur perempuan tersedia pada Tabel 5.

Tabel 5  
Intensitas kelahiran penduduk

Kelompok Umur	$b_{11}(x)$	$b_{12}(x)$	$b_{13}(x)$	$b_{21}(x)$	$b_{22}(x)$	$b_{23}(x)$	$b_{31}(x)$	$b_{32}(x)$	$b_{33}(x)$
10-14	0.05969	0.00240	0.00037	0.00098	0.05081	0.00107	0.00034	0.00218	0.06799
15-19	0.20218	0.01034	0.00158	0.00405	0.17206	0.00413	0.00150	0.00897	0.21324
20-24	0.31347	0.01619	0.00239	0.00576	0.26253	0.00565	0.00229	0.01363	0.30961
25-29	0.30825	0.01296	0.00188	0.00405	0.24994	0.00397	0.00177	0.01069	0.29503
30-34	0.22461	0.00753	0.00109	0.00222	0.17593	0.00225	0.00101	0.00624	0.21933
35-39	0.11665	0.00324	0.00048	0.00089	0.08934	0.00098	0.00045	0.00292	0.12725
40-44	0.03571	0.00085	0.00012	0.00022	0.02737	0.00024	0.00014	0.00095	0.04847
45-49	0.00389	0.00009	0.00001	0.00002	0.00298	0.00002	0.00002	0.00013	0.00713

Tabel 5 menunjukkan bahwa tingkat intensitas kelahiran bayi tertinggi terjadi pada perempuan kelompok umur 20-24 tahun baik untuk perempuan yang

menetap di wilayah yang sama ( $i = j$ ) maupun untuk perempuan yang melakukan perpindahan ke wilayah yang berbeda ( $i \neq j$ ). Hal tersebut terjadi karena puncak fertilitas pada setiap wilayah terjadi pada perempuan kelompok umur 25-29 tahun. Sedangkan tingkat intensitas kelahiran terendah terjadi pada perempuan kelompok umur 45-49 tahun baik untuk perempuan yang menetap di wilayah yang sama ( $i = j$ ) maupun untuk perempuan yang melakukan perpindahan ke wilayah yang berbeda ( $i \neq j$ ). Hal tersebut terjadi karena perempuan pada kelompok umur 45-49 tahun sudah mendekati batas akhir umur reproduksi untuk setiap wilayah.

## 6 PROYEKSI PENDUDUK MULTIREGIONAL

Matriks operator pertumbuhan penduduk ( $G$ ) dapat disusun dari matriks intensitas kelahiran  $B(x)$  dan *survivorship*  $S(x)$  [11], sehingga dapat dilakukan proyeksi penduduk untuk periode  $t+1$  dari komposisi penduduk pada periode  $t$  ( $K^{(t)}$ ) dengan menggunakan model proyeksi  $K^{(t+1)} = GK^{(t)}$ , dengan

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & B(10) & \dots & B(45) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ S(0) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & S(5) & 0 & 0 & 0 & \vdots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S(10) & 0 & 0 & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S(45) & 0 & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S(50) & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & S(80) & 0 \end{bmatrix},$$

$$K^{(t)} = \begin{bmatrix} K^{(t)}(0) \\ K^{(t)}(5) \\ \vdots \\ K^{(t)}(x) \\ \vdots \\ K^{(t)}(85) \end{bmatrix}, \quad K^{(t)}(x) = \begin{bmatrix} K_1^{(t)}(x) \\ K_2^{(t)}(x) \\ K_3^{(t)}(x) \end{bmatrix},$$

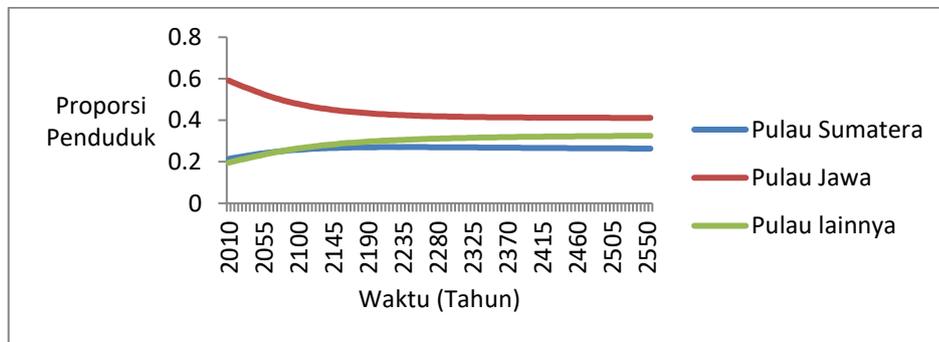
di mana  $K_i^{(t)}(x)$ : banyaknya penduduk kelompok umur  $x$  di wilayah  $i$  pada periode  $t$ .

Perhitungan proyeksi penduduk Indonesia dilakukan berdasarkan data jumlah penduduk hasil Sensus Penduduk tahun 2010 [4]. Hasil proyeksi penduduk Indonesia untuk tahun 2015 dan 2020 dapat dilihat pada Tabel 6.

Tabel 6  
 Hasil proyeksi penduduk Indonesia untuk tahun 2015 dan 2020

Kelompok Umur	Banyaknya Penduduk Pulau Sumatera (1000 jiwa)			Banyaknya Penduduk Pulau Jawa (1000 jiwa)			Banyaknya Penduduk Pulau Lainnya (1000 jiwa)		
	2010	2015	2020	2010	2015	2020	2010	2015	2020
	0-4	5,426	5,885	6,120	12,232	12,607	12,758	5,022	5,399
5-9	5,359	5,389	5,842	12,669	12,177	12,557	5,226	4,991	5,363
10-14	5,167	5,351	5,376	12,675	12,596	12,110	4,829	5,229	4,995
15-19	4,659	5,170	5,348	11,979	12,568	12,501	4,242	4,852	5,242
20-24	4,564	4,647	5,143	11,351	11,863	12,475	3,977	4,286	4,879
25-29	4,679	4,493	4,584	12,478	11,306	11,815	4,154	3,997	4,296
30-34	4,245	4,592	4,399	11,745	12,452	11,307	3,840	4,137	3,969
35-39	3,751	4,178	4,516	11,212	11,677	12,385	3,542	3,813	4,106
40-44	3,209	3,701	4,116	10,305	11,080	11,549	3,011	3,508	3,774
45-49	2,720	3,161	3,641	8,890	10,109	10,878	2,431	2,969	3,453
50-54	2,221	2,658	3,088	7,381	8,636	9,823	1,960	2,375	2,896
55-59	1,574	2,137	2,556	5,495	7,061	8,263	1,379	1,882	2,279
60-64	1,041	1,476	2,002	3,958	5,125	6,587	1,059	1,289	1,757
65-69	783	937	1,326	3,167	3,539	4,582	744	943	1,149
70-74	580	656	783	2,355	2,638	2,949	521	615	779
75-79	319	430	486	1,379	1,743	1,953	280	379	448
80-84	202	191	257	770	832	1,051	171	163	220
85+	132	80	75	462	314	339	120	61	58
Total	50,631	55,131	59,660	140,501	148,321	155,882	46,509	50,889	55,396

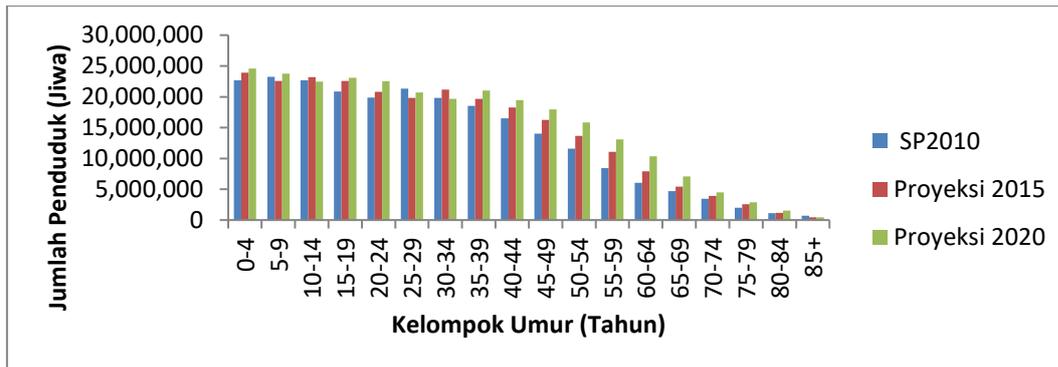
Tabel 6 menunjukkan bahwa jumlah penduduk Indonesia pada tahun 2015 adalah 254,340,646 jiwa. Hasil proyeksi untuk tahun 2015 tidak jauh berbeda dengan hasil SUPAS 2015 yang menyatakan bahwa jumlah penduduk Indonesia pada tahun 2015 adalah 255,182,144 jiwa. Sedangkan jumlah penduduk Indonesia pada tahun 2020 adalah 270,937,805 jiwa dengan 22.02% berada di Pulau Sumatera, 57.53% berada di Pulau Jawa dan 20.45% berada di pulau lainnya. Terlihat bahwa proporsi penduduk yang menempati Pulau Jawa akan semakin menurun, sedangkan proporsi penduduk yang menempati Pulau Sumatera dan pulau lainnya akan semakin meningkat. Perubahan proporsi penduduk dalam waktu jangka panjang dapat dilihat pada Gambar 3.



Gambar 3 Perubahan proporsi penduduk Indonesia

Gambar 3 memperlihatkan bahwa dalam waktu jangka panjang 26% penduduk Indonesia akan berada di Pulau Sumatera, 41% di Pulau Jawa dan 33% di pulau lainnya. Hal tersebut sudah mulai terjadi pada tahun 2530.

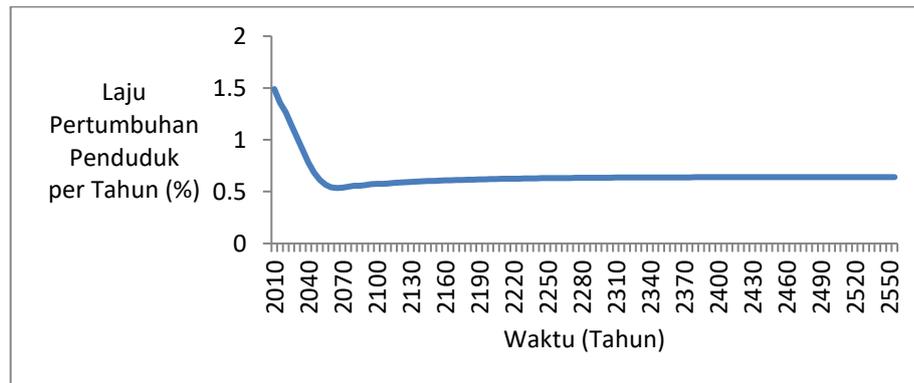
Perbandingan antara jumlah penduduk Indonesia hasil Sensus Penduduk tahun 2010 dengan hasil proyeksi penduduk untuk tahun 2015 dan 2020 berdasarkan kelompok umur dapat dilihat pada Gambar 4.



Gambar 4 Jumlah penduduk Indonesia tahun 2010 beserta hasil proyeksi penduduk untuk tahun 2015 dan tahun 2020

Gambar 4 menunjukkan bahwa hampir seluruh kelompok umur mengalami peningkatan jumlah penduduk. Namun ada beberapa kelompok umur yang mengalami penurunan jumlah penduduk. Salah satu penurunan jumlah penduduk terjadi pada kelompok umur 5-9 tahun. Hal tersebut terjadi karena jumlah kelahiran penduduk Indonesia secara keseluruhan pada tahun 2000-2005 lebih tinggi daripada tahun 2005-2010.

Dari hasil penelusuran dengan bantuan program *Mathematica 10.3* diperoleh 54 nilai eigen yang bersesuaian dengan persamaan polinom karakteristik dari matriks  $G$ , diperoleh nilai eigen dominan  $\lambda$  sebesar 1.0326. Sehingga dalam waktu jangka panjang laju pertumbuhan penduduk Indonesia akan sebesar  $r = \frac{1}{5}\ln(\lambda) = 0.641\%$  per tahun. Berdasarkan hasil proyeksi penduduk pada Tabel 6, diperoleh laju pertumbuhan penduduk untuk tahun 2011-2015 adalah  $\frac{1}{5}\ln(254,340,646/237,641,326) \times 100\% = 1.36\%$  per tahun. Sedangkan laju pertumbuhan penduduk untuk tahun 2016-2020 adalah  $\frac{1}{5}\ln(270,937,805/254,340,646) \times 100\% = 1.27\%$  per tahun. Terlihat bahwa laju pertumbuhan penduduk akan semakin menurun. Perubahan laju pertumbuhan penduduk Indonesia dalam waktu jangka panjang dapat dilihat pada Gambar 5.



Gambar 5 Perubahan laju pertumbuhan penduduk Indonesia

Gambar 5 memperlihatkan bahwa dalam waktu jangka panjang laju pertumbuhan penduduk Indonesia menjadi 0.641% per tahun. Artinya bahwa pertumbuhan penduduk Indonesia pada akhirnya akan stabil dan konvergen menuju rasio pertumbuhan yang stabil sebesar  $\lambda = 1.0326$  dan laju pertumbuhan yang stabil sebesar  $r = 0.641\%$  per tahun. Hal tersebut mulai terjadi pada tahun 2510 dan terjadi ketika proporsi penduduk berdasarkan komposisi umur pada setiap wilayah mencapai kondisi yang stabil dengan asumsi bahwa tidak ada perubahan dalam tren kelahiran dan kematian. Sehingga analisis kestabilan laju pertumbuhan penduduk melalui nilai eigen dominan dari matriks  $G$  sesuai dengan perubahan laju pertumbuhan penduduk yang diperoleh dari hasil proyeksi penduduk dalam waktu jangka panjang.

## 6 SIMPULAN

Berdasarkan hasil proyeksi penduduk untuk tahun 2020, diperoleh bahwa jumlah penduduk Indonesia pada tahun 2020 adalah 270,937,805 jiwa dengan 22% penduduk berada di Pulau Sumatera, 58% penduduk berada di Pulau Jawa dan 20% penduduk berada di pulau lainnya. Dalam waktu jangka panjang 26% penduduk Indonesia akan berada di Pulau Sumatera, 41% di Pulau Jawa dan 33% di pulau lainnya yang sudah mulai terjadi pada tahun 2530. Berdasarkan hasil analisis terhadap matriks operator pertumbuhan, dalam waktu jangka panjang laju pertumbuhan penduduk Indonesia akan menjadi sebesar 0.6414% per tahun. Hal tersebut terjadi ketika proporsi penduduk berdasarkan komposisi umur pada setiap wilayah mencapai kondisi yang stabil dengan asumsi bahwa tidak ada perubahan dalam tren kelahiran dan kematian.

## DAFTAR PUSTAKA

- [1] [BKKBN] Badan Kependudukan dan Keluarga Berencana Nasional. 2010. *Angka Kelahiran Menurut Umur (ASFR)* [Internet]. [diacu 2015 Oktober]. Tersedia pada: [www.bkkbn.go.id/kependudukan/Pages/DataSensus/Sensus\\_Penduduk/Fertilitas/ASFR/Nasional.aspx](http://www.bkkbn.go.id/kependudukan/Pages/DataSensus/Sensus_Penduduk/Fertilitas/ASFR/Nasional.aspx).
- [2] Bowers NL, Gerber HU, Hickman JU, Jones DA, Nesbit CJ. 1997. *Actuarial Mathematics*. Ed ke-2. USA: Society of Actuaries.
- [3] [BPS] Badan Pusat Statistik. 2015. *Penduduk Indonesia: Hasil Survei Penduduk Antar Sensus 2015*. Jakarta (ID): BPS.
- [4] [BPS 2010a] Badan Pusat Statistik. 2010. *Sensus penduduk 2010* [Internet]. [diacu 2014 November]. Tersedia pada: <http://sp2010.bps.go.id>.
- [5] [BPS 2010b] Badan Pusat Statistik. 2010. *Statistik Migrasi Indonesia: Hasil Sensus Penduduk 2010*. Jakarta (ID): BPS.
- [6] Brown RL. 1997. *Introduction to The Mathematics of Demography*. Ed ke-3. Winsted: Actex Publication.
- [7] [DIESA] Department of International Economic and Social Affairs. 1983. *Manual X: Indirect Techniques for Demographic Estimation*. New York: UN.
- [8] Ghahramani S. 2005. *Fundamentals of Probability with Stochastics Processes*. Ed ke-3. New Jersey: Upper Saddle River.
- [9] Muslimah. 2008. Model skedul migrasi dan aplikasinya dalam proyeksi penduduk multiregional [tesis]. Bogor (ID): Program Pascasarjana, Institut Pertanian Bogor.
- [10] Rogers A. 1984. *Migration, Urbanization, and Spatial Population Dynamics*. USA Westview Press.
- [11] Rogers A. 1995. *Multiregional Demography: Principles Method, and Extension*. New York: John Wiley & Sons, Inc.