APLIKASI SIMULASI MONTE CARLO UNTUK MENENTUKAN NILAI OPSI ASIA DENGAN MENGGUNAKAN METODE *CONTROL VARIATE* PADA KOMODITAS PERTANIAN

D. P. ANGGRAINI[1], D. C. LESMANA[2], B. SETIAWATY[2]

Abstrak

Petani memiliki peran penting dalam ketersedian pangan dan pakan untuk memenuhi kebutuhan nasional. Namun, dengan peran tersebut, petani tidak memperoleh jaminan kesejahteraan dari profesinya. Hal ini dikarenakan petani dihadapkan pada ketidakpastian harga jual komoditas yang menyebabkan adanya risiko kerugian. Untuk mengatasi masalah ini, terdapat instrumen keuangan yang dapat digunakan untuk melindungi harga suatu aset dari risiko fluktuasi adalah opsi. Salah satu jenis opsi adalah opsi Asia. Harga opsi Asia bergantung pada rataan harga aset. Jika harga aset diasumsikan berdistribusi lognormal sesuai dengan model Black-Scholes, maka rataan aritmetik dari harga aset tidak diketahui distribusinya. Hal ini menyebabkan harga opsi Asia dengan rataan aritmetik tidak dapat ditentukan secara analitik. Untuk menentukan harganya, diperlukan penaksiran nilai dengan menggunakan metode numerik. Dalam penelitian ini digunakan simulasi Monte Carlo. Hukum bilangan besar menjamin hasil taksiran dari simulasi Monte Carlo konvergen ke solusi analitiknya dengan semakin banyaknya simulasi yang dilakukan. Namun, karena simulasi Monte Carlo memiliki tingkat kekonvergenan yang rendah, perlu ditingkatkan efisiensinya dengan menggunakan metode *control variate*. Hasil numerik menunjukkan bahwa nilai *error* dari harga opsi dengan menggunakan *control variate* berkurang secara signifikan daripada tanpa *control variate*, sehingga solusi yang diperoleh lebih cepat menuju solusi analitiknya. Dalam penelitian ini, metode tersebut diterapkan untuk menentukan harga opsi Asia pada komoditas pertanian yaitu jagung pipilan.

Kata kunci: distribusi lognormal, metode *control variate*, model Black-Scholes, opsi Asia, rataan aritmetik, simulasi Monte Carlo

1 PENDAHULUAN

Petani merupakan penyedia utama komoditas pertanian dalam memenuhi kebutuhan pangan, pakan dan kebutuhan lainnya di suatu wilayah dan negara. Petani sering kali dihadapkan dengan naik turunnya harga jual komoditas di pasar. Jika harga jual komoditas yang diproduksinya turun drastis, kemungkinan petani

[1] Mahasiswa S2 Program Studi Matematika Terapan, Sekolah Pascasarjana IPB, Jalan Meranti Kampus IPB Dramaga Bogor, 16680. Email: dyahpritaanggraini@yahoo.com

[2] Departemen Matematika, Fakultas Ilmu Matematika dan Pengetahuan Alam, Jalan Meranti Kampus IPB Dramaga Bogor, 16680.

tidak memperoleh keuntungan atau malah mengalami kerugian. Ketidakpastian harga komoditas di pasar dapat mengancam kesejahteraan petani. Oleh karena itu perlu ada strategi untuk melindungi petani dari kemungkinan risiko yang dihadapi.

Dalam bidang keuangan, salah satu alat yang dapat meminimalisir risiko terjadinya fluktuasi harga dalam transaksi jual beli aset adalah opsi. Opsi merupakan suatu produk derivatif yang salah satu fungsinya melindungi tingkat keuntungan (*return*) yang diperoleh dari suatu aset. Opsi adalah kontrak perjanjian yang memberikan hak kepada pemegang opsi untuk membeli atau menjual aset pada harga dan waktu yang telah ditentukan [4]. Pemegang opsi dapat menjalankan haknya (eksekusi) dengan membeli atau menjual aset sebesar harga yang ditentukan pada kontrak (harga *strike*) jika lebih menguntungkan dibandingkan membeli atau menjualnya di pasar. Namun, jika dipandang tidak menguntungkan, maka pemegang opsi berhak untuk tidak mengeksekusi opsi dan kemudian membeli atau menjual aset di pasar.

Opsi diperdagangkan di pasar keuangan. Salah satu hal terpenting dalam perdagangan opsi adalah penentuan harga opsi. Harga opsi bergantung pada aset yang mendasarinya seperti saham, obligasi, komoditas, dan lain sebagainya. Salah satu penentuan harga opsi adalah dengan cara menghitung nilai sekarang dari nilai harapan *payoff* (keuntungan yang diperoleh pada saat eksekusi opsi).

Salah satu jenis opsi adalah opsi Asia. Opsi Asia memiliki *payoff* yang bergantung pada rataan harga aset. Dalam menentukan harga opsi Asia, perlu diasumsikan proses dari harga aset. Harga aset diasumsikan mengikuti proses gerak Brown geometrik sesuai dengan model Black-Scholes. Dengan penggunaan asumsi tersebut, sebaran rataan aritmetik dari harga aset tidak dapat ditentukan. Hal ini menyebabkan harga opsi Asia dengan rataan aritmetik tidak dapat ditentukan secara analitik [4].

Dalam menentukan harga opsi yang tidak dapat ditentukan secara analitik, perlu dilakukan penaksiran nilai dengan menggunakan simulasi numerik yang salah satunya adalah metode Monte Carlo. Penaksiran nilai dengan menggunakan simulasi Monte Carlo adalah dengan membangkitkan sampel acak dari simulasi kemudian ditentukan rataannya. Kelebihan metode Monte Carlo adalah hasil taksirannya konvergen ke solusi analitik dengan semakin banyak simulasi yang dilakukan [2].

Di sisi lain, simulasi Monte Carlo memiliki kekurangan yaitu tingkat kekonvergenannya yang rendah sehingga menyebabkan kurang efisien dalam memperoleh solusi yang akurat. Untuk meningkatkan efisiensinya, digunakan metode *control variate* untuk mereduksi nilai varian dari estimator. Metode *control variate* memanfaatkan informasi *error* dalam menaksir kuantitas yang diketahui untuk mereduksi *error* dalam penaksiran kuantitas yang tidak diketahui [2].

Pada penelitian sebelumnya, Dingec [1] menaksir harga opsi Asia dengan menggunakan opsi Asia dengan rataan geometrik sebagai *control variate*. Pada tulisan ini, metode *control variate* akan diterapkan untuk menentukan harga opsi

Asia pada komoditas pertanian untuk meminimalisir risiko yang dihadapi oleh petani.

2 OPSI ASIA

Opsi Asia merupakan salah satu opsi eksotik. Opsi eksotik adalah opsi yang dibuat karena adanya kebutuhan pengguna opsi yang tidak dapat dipenuhi dari opsi yang diperjualbelikan di bursa. Opsi Asia memiliki karakteristik yaitu nilai *payoff*-nya bergantung pada rataan harga aset selama periode opsi. Rataan harga aset dihitung dari harga aset dalam suatu lintasan (*path*) selama periode opsi, sehingga opsi Asia biasa disebut opsi yang *path dependent*. Opsi Asia memiliki kelebihan yaitu dapat meminimalisir manipulasi harga aset pada akhir periode opsi, karena harganya bergantung pada rataan harga aset selama periode opsi, bukan bergantung pada harga aset di akhir periode saja.

Berdasarkan hak yang dimiliki, opsi Asia terbagi menjadi dua yaitu:
- Opsi *call* Asia adalah opsi Asia yang memberikan hak kepada pemegang opsi untuk membeli aset.
- Opsi *put* Asia adalah opsi Asia yang memberikan hak kepada pemegang opsi untuk menjual aset.

Berdasarkan waktu pelaksanaan eksekusi opsi, opsi Asia terbagi menjadi dua yaitu:
- Opsi Asia jenis Eropa adalah opsi Asia yang hanya dapat dieksekusi pada akhir periode opsi.
- Opsi Asia jenis Amerika adalah opsi Asia yang dapat dieksekusi kapanpun selama periode opsi berlaku.

Rataan yang dapat dipergunakan dalam penghitungan *payoff* opsi Asia adalah sebagai berikut:
- rataan aritmetik

$$\bar{S}_A = \frac{1}{d}\sum_{j=1}^{d} S(t_j),$$

dengan $S(t_j)$ harga aset pada waktu ke-t_j, $t_1 < t_2 < \cdots < t_d$, dan d adalah banyaknya sub interval waktu selama periode opsi T,
- rataan geometrik

$$\bar{S}_G = \left(\prod_{j=1}^{d} S(t_j)\right)^{\frac{1}{d}}.$$

Berdasarkan rataan yang digunakan, opsi Asia terbagi menjadi dua jenis yaitu:

a) opsi Asia dengan rataan aritmetik
   - *payoff* opsi *call* Asia:

$$A_{call} = \max(\bar{S}_A - K, 0),$$

dengan K adalah harga *strike*,

- *payoff* opsi *put* Asia:

$$A_{put} = \max(K - \bar{S}_A, 0),$$

b) opsi Asia dengan rataan geometrik

- *payoff* opsi *call* Asia:

$$G_{call} = \max(\bar{S}_G - K, 0),$$

- *payoff* opsi *put* Asia:

$$G_{put} = \max(K - \bar{S}_G, 0).$$

Harga opsi Asia dengan rataan aritmetik tidak dapat ditentukan secara analitik. Hal ini dikarenakan dengan penggunaan asumsi harga aset mengikuti proses gerak Brown geometrik, maka harga aset menyebar lognormal. Dengan penggunaan asumsi tersebut, rataan aritmetik dari harga aset tidak dapat ditentukan sebarannya. Oleh karena sebarannya tidak diketahui, maka harganya tidak dapat ditentukan. Berbeda dari opsi Asia dengan rataan aritmetik, harga opsi Asia dengan rataan geometrik dapat ditentukan secara analitik. Hal ini dikarenakan rataan geometrik dari harga aset menyebar lognormal, sehingga dapat digunakan rumus Black-Scholes untuk menentukan harganya.

Untuk menghitung harga opsi Asia, diperlukan pengamatan terhadap harga aset selama periode opsi T sebanyak d pengamatan. Harga aset dalam setiap *path* pada simulasi ke-i pada waktu t_j dapat diperoleh dengan menggunakan persamaan berikut

$$S(t_j)^{(i)} = S(t_{j-1})^{(i)} \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t + \sigma\varepsilon(t_j)^{(i)}\sqrt{\Delta t}\right), \tag{1}$$

dengan $i = 1,2,\dots,n; j = 1,2,\dots,d$; r tingkat bunga bebas risiko, σ volatilitas dari harga aset, $\varepsilon(t_j)$ bilangan acak berdistribusi normal baku pada waktu t_j, Δt selang waktu antara pengamatan harga aset yang diperoleh dari $\Delta t = \frac{T}{d}$, dengan nilai Δt konstan untuk setiap interval, dan nilai σ, r, T dalam satuan tahun [4].

3 VOLATILITAS HARGA ASET

Volatilitas (σ) atas harga aset adalah suatu ukuran ketidakpastian mengenai pergerakan harga aset di masa yang akan datang. Semakin tinggi nilai volatilitas, maka semakin besar kenaikan atau penurunan harga aset di masa yang akan datang. Besarnya kenaikan atau penurunan harga aset ini akan mempengaruhi besarnya harga opsi.

Volatilitas diukur dengan menggunakan standar deviasi dari *return* harga aset selama waktu yang diamati. Volatilitas dari harga aset dapat ditaksir secara empiris berdasarkan data historis.

Misalkan logaritma *return* harga aset ke-j dinyatakan sebagai berikut

$$u_j = \ln \frac{S(t_j)}{S(t_{j-1})}; j = 1,2,\dots,d. \tag{2}$$

Standar deviasi dari u_j dapat dihitung dengan rumus

$$s = \sqrt{\frac{1}{(d-1)} \sum_{j=1}^{d} (u_j - \bar{u})^2},$$

dengan $\bar{u}$ adalah rataan dari u_j.

Volatilitas dari suatu aset dapat ditaksir dengan $\hat{\sigma}$ menggunakan persamaan berikut:

$$\hat{\sigma} = \frac{s}{\sqrt{\Delta t}}, \tag{3}$$

[4]. Nilai volatilitas ini digunakan untuk menyimulasikan harga komoditas dalam satu *path*. Data harga komoditas yang digunakan adalah data bulanan, sehingga volatilitasnya bulanan dengan $\Delta t = \frac{1}{12}$ tahun.

4 METODE MONTE CARLO

Metode Monte Carlo digunakan untuk menaksir suatu nilai yang tidak dapat ditentukan secara analitik. Untuk menentukan nilai tersebut, dilakukan penaksiran nilai secara numerik dengan cara membangkitkan sampel acak dari hasil simulasi kemudian ditentukan rataannya. Hukum bilangan besar menjamin taksiran dari estimator Monte Carlo konvergen ke solusi analitiknya dengan semakin banyak sampel yang digunakan [2].

Penggunaan metode ini salah satunya adalah dalam menentukan harga opsi yang merupakan nilai sekarang dari nilai harapan *payoff* opsi. Pada penelitian ini ditentukan harga opsi *put* Asia dengan rataan aritmetik sebagai berikut

$$V = e^{-rT} E[A],$$

dengan $E[A]$ adalah nilai harapan *payoff* opsi *put* Asia dengan rataan aritmetik. Harga opsi tersebut juga dapat dinyatakan sebagai berikut

$$V = E[e^{-rT} A]. \tag{4}$$

Harga opsi V tidak dapat ditentukan secara analitik. Untuk itu perlu dilakukan penaksiran dengan menggunakan estimator Monte Carlo sebagai berikut

$$\hat{V}_{MC} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} e^{-rT} A^{(i)},$$

dengan $A^{(i)}$ merupakan sampel *payoff* opsi *put* Asia pada simulasi ke-i yang diperoleh dari rumus berikut

$$A^{(i)} = \max\left(K - \bar{S}_A{}^{(i)}, 0\right); i = 1,2, \dots, n. \tag{5}$$

Harga opsi *put* Asia dengan rataan aritmetik ditaksir dengan estimator Monte Carlo sebagai berikut

$$V \approx \hat{V}_{MC}.$$

Hasil taksiran harga opsi dengan menggunakan metode Monte Carlo akan semakin baik dengan semakin banyaknya simulasi yang dilakukan.

Di sisi lain, metode Monte Carlo memiliki kekurangan yaitu tingkat kekonvergenannya rendah sebesar $O\left(n^{-\frac{1}{2}}\right)$ [2]. Dengan tingkat kekonvergenan yang rendah, menyebabkan metode ini kurang efisien dalam memperoleh solusi yang akurat. Untuk itu perlu ditingkatkan efisiensi metode Monte Carlo dengan cara mereduksi nilai varian dari estimatornya. Oleh karena itu diperlukan metode reduksi varian yang akan digabungkan dengan metode Monte Carlo.

5 METODE *CONTROL VARIATE*

Metode *control variate* adalah salah satu metode reduksi varian yang digunakan untuk meningkatkan efisiensi simulasi Monte Carlo. Dengan mereduksi varian, maka interval kepercayaan yang memuat solusi akan semakin menyempit sehingga lebih cepat diperoleh solusi yang akurat.

Sebagai ilustrasi, metode ini dapat digunakan untuk menentukan harga suatu opsi yang tidak dapat ditentukan secara analitik. Prinsipnya adalah menggunakan opsi lain atau variabel lain yang memiliki korelasi dan memiliki solusi analitik.

Dalam penelitian ini, ditentukan harga opsi *put* Asia dengan rataan aritmetik. Harga opsi V pada persamaan (4) tidak dapat ditentukan secara analitik. Untuk menaksir harga V, ditentukan dahulu *control variate* dari opsi Asia dengan rataan aritmetik yaitu opsi Asia dengan rataan geometrik. Opsi Asia dengan rataan geometrik memiliki *payoff* yang bernilai G dan memiliki nilai harapan $E[G]$. Simulasikan sampel *payoff* kedua opsi secara bersamaan dengan menggunakan simulasi Monte Carlo. Setelah dilakukan simulasi sebanyak n simulasi, didapat pasangan sampel *payoff* kedua opsi yang identik dan saling bebas yaitu $\left(A^{(1)}, G^{(1)}\right), \left(A^{(2)}, G^{(2)}\right), \dots, \left(A^{(n)}, G^{(n)}\right)$.

Estimator Monte Carlo dengan metode *control variate* untuk menaksir harga opsi V ialah

$$\hat{V}_{CV} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e^{-rT}\left(A^{(i)} - c\left(G^{(i)} - E[G]\right)\right),$$

dengan c faktor pereduksi varian yang dapat dihitung menggunakan persamaan berikut

$$c = \frac{\operatorname{cov}(A, G)}{\operatorname{var}(G)},$$

dengan $\mathrm{cov}(A, G)$ adalah nilai kovarian dari A dan G, dan $\mathrm{var}(G)$ adalah nilai varian dari G [2]. Jika nilai $\mathrm{cov}(A, G)$ dan $\mathrm{var}(G)$ tidak dapat ditentukan secara analitik, maka nilai c dapat diperoleh dengan pendugaan melalui simulasi p pilot sebagai berikut

$$\hat{c} = \frac{\sum_{i=1}^{p}\left(A^{(i)} - \bar{A}\right)\left(G^{(i)} - E[G]\right)}{\sum_{i=1}^{p}(G^{(i)} - E[G])^2}, \tag{6}$$

dengan $\bar{A}$ rataan dari $A^{(i)}$ dan p banyaknya simulasi pilot [2].

Harga opsi Asia dengan rataan aritmetik dapat ditaksir dengan menggunakan estimator *control variate* sebagai berikut

$$V \approx \hat{V}_{CV}.$$

Hasil taksiran harga opsi dengan estimator *control variate* tersebut memiliki varian yang lebih rendah dibandingkan dengan estimator Monte Carlo.

6 APLIKASI METODE *CONTROL VARIATE* UNTUK MENENTUKAN HARGA OPSI ASIA

6.1 Data Harga Komoditas

Data yang digunakan adalah harga komoditas bulanan dalam satuan Rp/kg selama tahun 2014-2015 yang diperoleh dari [5]. Dalam penentuan komoditas, dipilih komoditas yang tidak cepat membusuk, karena periode opsi berjangka waktu bulanan hingga tahunan. Dalam penelitian ini, komoditas yang dipilih yaitu jagung pipilan.

6.2 Pengujian Kenormalan Data

Data harga komoditas yang telah diperoleh kemudian ditentukan nilai logaritma dari *return* harganya dengan menggunakan persamaan (2). Selanjutnya dilakukan uji normal terhadap data tersebut. *Software* yang digunakan untuk menguji kenormalan data adalah *software* SPSS versi 22 dengan menggunakan uji normal Kolmogorov-Smirnov.

Uji normal Kolmogorov-Smirnov merupakan uji normal dengan membandingkan distribusi frekuensi kumulatif dari data sampel yang diamati terhadap distribusi frekuensi kumulatif empiris. Kedua distribusi tersebut dibandingkan dengan menggunakan taksiran peluang *p-value* untuk menentukan apakah data sampel yang digunakan mirip atau berbeda dengan data dari populasi yang berdistribusi normal.

Dalam melakukan pengujian kenormalan tersebut, hipotesis yang digunakan dalam pengambilan keputusannya yaitu

H_0: data berasal dari populasi yang berdistribusi normal,
H_1: data tidak berasal dari populasi yang berdistribusi normal.

Kriteria keputusan yang digunakan dengan tingkat kepercayaan α adalah sebagai berikut

- jika *p-value* < α maka tolak H_0 dan terima H_1
- jika *p-value* > α maka terima H_0 dan tolak H_1.

Statistik uji yang digunakan dalam uji normal Kolomogorov-Smirnov adalah sebagai berikut

$$Z = \sqrt{N}\,\max(D^+, D^-),$$

dengan N adalah banyaknya sampel data yang diambil, D^+dan D^- adalah selisih absolut nilai distribusi frekuensi kumulatif dari data sampel dengan nilai distribusi frekuensi kumulatif empiris. Dari nilai Z tersebut kemudian dihitung *p-value*. Hasil *p-value* yang diperoleh sebesar 0.061. Tingkat kepercayaan yang digunakan adalah $\alpha = 0.05$. Berdasarkan uji tersebut, *p-value* $> \alpha$ sehingga keputusannya terima H_0 yang artinya data logaritma *return* harga komoditas jagung pipilan berdistribusi normal. [3].

6.3 Penentuan Volatilitas

Setelah dilakukan uji normal terhadap logaritma *return* harga komoditas jagung pipilan, kemudian ditentukan nilai volatilitas σ dengan menggunakan persamaan (3). Nilai volatilitas dari komoditas jagung pipilan diperoleh sebesar 0.092787. Nilai volatilitas ini digunakan untuk menyimulasikan harga komoditas dalam satu *path* dengan menggunakan persamaan (1).

6.4 Simulasi Numerik

Pada simulasi numerik yang dilakukan, input parameter-parameter yang digunakan adalah harga awal komoditas $S(0) =$ Rp 7,500/kg, harga *strike* $K =$ Rp 7,600/kg, lama periode opsi $T = \frac{1}{4}$ tahun, tingkat bunga bebas risiko $r = 7.5\%$ per tahun, volatilitas $\sigma = 0.092787$, banyaknya subinterval waktu $d = 12$, dan banyaknya simulasi pilot $p = 100$.

Simulasi dilakukan untuk menentukan harga opsi *put* Asia dengan rataan aritmetik menggunakan bahasa pemrograman *scilab* 5.5. Simulasi yang digunakan adalah

- simulasi Monte Carlo biasa (MCB) yaitu simulasi Monte Carlo tanpa menggunakan metode *control variate*, dan,
- simulasi Monte Carlo dengan menggunakan *control variate* opsi Asia dengan rataan geometrik (MCG).

Simulasi Monte Carlo Biasa (MCB)

Langkah-langkah dalam melakukan simulasi MCB yaitu:

- Membangkitkan bilangan acak ke-j yang menyebar normal baku dalam tiap *path* pada simulasi ke-i

$$\varepsilon_j{}^{(i)}; i = 1,2, \dots n; j = 1,2, \dots, d. \qquad (7)$$

- Menyimulasikan harga aset dalam tiap *path* pada simulasi ke-i dengan menggunakan persamaan (1) sehingga didapat $S(t_1)^{(i)}, S(t_2)^{(i)}, \dots, S(t_d)^{(i)}$.
- Menentukan sampel rataan aritmetik dari harga aset pada simulasi ke-i dengan menggunakan persamaan
$$\bar{S}_A{}^{(i)} = \frac{1}{d}\sum_{j=1}^{d} S(t_j)^{(i)}; i = 1,2,\dots,n. \quad (8)$$
- Menentukan sampel *payoff* opsi *put* Asia dengan rataan aritmetik pada simulasi ke-i dengan menggunakan persamaan (5) diperoleh $A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(n)}$.
- Sampel harga opsi *put* Asia dengan metode Monte Carlo pada simulasi ke-i
$$V_{MC}{}^{(i)} = e^{-rT}A^{(i)}; i = 1,2,\dots,n.$$
- Estimator Monte Carlo untuk menaksir harga opsi Asia V adalah
$$\hat{V}_{MC} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} V_{MC}{}^{(i)}.$$
- Dengan kepercayaan sebesar 95%, interval kepercayaan dari harga opsi adalah
$$\left[\hat{V}_{MC} - 1.96\frac{s_{MC}}{\sqrt{n}}, \hat{V}_{MC} + 1.96\frac{s_{MC}}{\sqrt{n}}\right]$$
dengan s_{MC}^2 merupakan varian dari sampel harga opsi sebagai berikut
$$s_{MC}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(V_{MC}{}^{(i)} - \hat{V}_{MC}\right)^2.$$

Berikut Tabel 1 merupakan hasil simulasi MCB untuk menentukan harga opsi *put* Asia dengan berbagai nilai *n* (banyaknya simulasi) yang dipilih.

Tabel 1
Hasil simulasi MCB

Banyaknya simulasi	Harga opsi Asia (Rp/kg)	*Error* taksiran	Interval kepercayaan
10	144.606800	0.331357	[118.513950;170.699630]
100	86.560220	0.117029	[84.522711;88.597727]
1,000	102.502000	0.056698	[102.242450;102.761440]
10,000	99.459750	0.027845	[99.433921;99.485570]
100,000	97.336980	0.006644	[97.334436;97.339521]

Tabel 1 menunjukkan harga opsi Asia dari hasil simulasi MCB disertai nilai *error* taksiran dan interval kepercayaan. Oleh karena opsi Asia tidak memiliki solusi analitik, maka nilai *error* taksiran dihitung dari persentase selisih harga opsi pada tiap simulasi terhadap harga opsi pada simulasi optimal. Simulasi optimal dipilih dengan mempertimbangkan simulasi yang dapat diproses pada komputer sesuai kapasitas *memory* maksimum yang tersedia, yakni dengan simulasi $n =$ 300,000. Pada simulasi optimal tersebut, didapat harga opsi Asia sebesar Rp 96.69028/kg.

Dari hasil simulasi pada tabel, dapat terlihat bahwa dengan semakin banyak simulasi yang dilakukan, nilai *error* dari harga opsi Asia semakin mengecil. Nilai *error* pada simulasi dengan $n = 100{,}000$ sebesar 0.006644. Nilai *error* ini bisa diperkecil dengan memperbanyak simulasi yang dilakukan.

Interval kepercayaan dari setiap simulasi terlihat semakin menyempit dengan semakin banyak simulasi yang dilakukan. Dengan memperoleh interval kepercayaan yang semakin menyempit akan lebih mudah untuk mendapatkan solusi analitiknya.

Pada simulasi Monte Carlo, untuk meningkatkan akurasi dengan presisi ganda, yaitu memperkecil lebar interval kepercayaan menjadi setengah dari lebar interval pada simulasi sebelumnya, diperlukan simulasi 4 kali lebih besar dari simulasi sebelumnya. Sebagai contoh, lebar interval kepercayaan pada simulasi $n = 100{,}000$ sebesar 0.005085. Untuk meningkatkan dengan presisi ganda, yaitu agar lebar interval kepercayaan menjadi sebesar 0.0025425, diperlukan 400,000 simulasi. Simulasi ini akan memakan waktu jauh lebih lama, dan juga terkendala dengan kapasitas memori komputer yang terbatas. Hal ini menyebabkan simulasi MCB menjadi kurang efisien, sehingga diperlukan metode lain untuk meningkatkan efisiensinya dengan cara mereduksi varian.

Simulasi Monte Carlo dengan menggunakan *control variate* opsi Asia dengan rataan geometrik (MCG)

Langkah-langkah dalam melakukan simulasi MCG yaitu:

- Membangkitkan bilangan acak ke-j yang menyebar normal baku dalam tiap *path* pada simulasi ke-i, didapat $\varepsilon_1{}^{(i)}, \varepsilon_2{}^{(i)}, \dots, \varepsilon_d{}^{(i)}$.
- Menyimulasikan harga aset dalam tiap *path* pada simulasi ke-i dengan menggunakan persamaan (1) didapat $S(t_1)^{(i)}, S(t_2)^{(i)}, \dots, S(t_d)^{(i)}$.
- Menentukan sampel rataan aritmetik dari harga aset pada simulasi ke-i dengan menggunakan persamaan (8) sehingga didapat $\bar{S}_A^{(1)}, \bar{S}_A^{(2)}, \dots, \bar{S}_A^{(n)}$, bersamaan dengan itu dihitung sampel rataan geometrik harga aset pada simulasi ke-i sebagai berikut
$$\bar{S}_G{}^{(i)} = \left(\left(\prod_{j=1}^{d} S(t_j)\right)^{\frac{1}{d}}\right)^{(i)} ;\, i = 1,2,\dots,n.$$
- Menentukan sampel *payoff* opsi *put* Asia dengan rataan aritmetik pada simulasi ke-i dengan menggunakan persamaan (5) sehingga didapat $A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(n)}$. Bersamaan dengan itu dihitung sampel *payoff* opsi *put* Asia dengan rataan geometrik pada simulasi ke-i sebagai berikut
$$G^{(i)} = \max\left(K - \bar{S}_G{}^{(i)}, 0\right);\, i = 1,2,\dots,n.$$
- Sampel harga opsi *put* Asia dengan metode *control variate* pada simulasi ke-i adalah

$$V_{CV}{}^{(i)} = e^{-rT}\left(A^{(i)} - c\left(G^{(i)} - E[G]\right)\right); i = 1,2, \dots, n,$$

dengan nilai *c* didapat dari persamaan (6).

- Estimator *control variate* untuk menaksir harga opsi Asia V adalah

$$\hat{V}_{CV} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} V_{CV}{}^{(i)}.$$

- Dengan kepercayaan sebesar 95%, interval kepercayaan dari estimator harga opsi Asia adalah

$$\left[\hat{V}_{CV} - 1.96\frac{s_{CV}}{\sqrt{n}}, \hat{V}_{CV} + 1.96\frac{s_{CV}}{\sqrt{n}}\right],$$

dengan s_{CV}^2 varian sampel harga opsi yang diperoleh sebagai berikut

$$s_{CV}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(V_{CV}{}^{(i)} - \hat{V}_{CV}\right)^2.$$

Berikut Tabel 2 merupakan hasil simulasi MCG untuk menentukan harga opsi *put* Asia dengan berbagai nilai *n* (banyaknya simulasi) yang dipilih.

Tabel 2
Hasil simulasi MCG

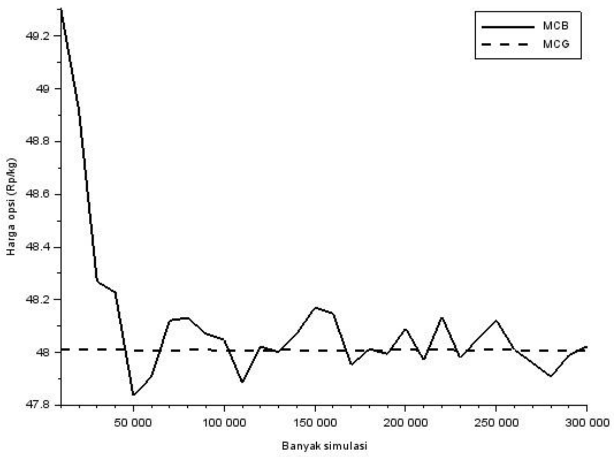
Banyaknya simulasi	Harga opsi Asia (Rp/kg)	*Error* taksiran	Interval kepercayaan
10	96.816890	0.001523	[96.698965;96.934814]
100	96.695170	0.000266	[96.683651;96.706689]
1,000	96.653550	0.000164	[96.652131;96.654964]
10,000	96.662080	0.000076	[96.661943;96.662209]
100,000	96.674350	0.000051	[96.674336;96.674362]

Pada Tabel 2, nilai *error* taksiran diperoleh dengan menghitung persentase selisih harga opsi pada tiap simulasi dengan harga opsi pada simulasi optimal dengan $n = 300{,}000$. Harga opsi pada simulasi optimal adalah sebesar Rp 96.66943/kg.

Dari Tabel 2, terlihat bahwa nilai *error* taksiran pada tiap simulasi yang dilakukan sudah jauh lebih baik dibandingkan dengan simulasi MCB. Nilai *error* yang dihasilkan pada simulasi MCG dengan $n = 100{,}000$ sebesar 0.000051 jauh lebih baik daripada nilai *error* dari simulasi MCB yaitu sebesar 0.006644. Nilai *error* dari simulasi MCG ini 130 kali lebih kecil dibandingkan dengan nilai *error* dari simulasi MCB. Dengan nilai *error* yang jauh lebih kecil, maka solusi yang diperoleh dari simulasi MCG lebih cepat mendekati solusi analitiknya.

Lebar interval kepercayaan harga opsi dengan simulasi MCG pada simulasi $n = 100{,}000$ adalah sebesar 0.000026. Lebar interval kepercayaan dari simulasi MCG ini jauh lebih kecil daripada lebar interval kepercayaan dari simulasi MCB pada simulasi $n = 100{,}000$ yaitu sebesar 0.005085. Jika dibandingkan, lebar interval dari simulasi MCG pada kasus ini memiliki dua digit akurasi lebih banyak dibandingkan dengan lebar interval dari simulasi MCB. Pada metode Monte Carlo, untuk menambahkan satu digit akurasi diperlukan simulasi 100 kali lebih banyak dari simulasi sebelumnya. Oleh karena itu, pada kasus ini, untuk menambahkan dua digit akurasi pada simulasi MCB dengan $n = 100{,}000$ dibutuhkan simulasi MCB sebanyak 1 milyar simulasi. Simulasi sebanyak itu akan memakan waktu lebih lama daripada simulasi sebanyak 100,000. Selain itu, belum tentu komputer dapat mengeksekusinya karena kapasitas memorinya terbatas. Hal ini memperlihatkan bahwa untuk memperoleh solusi yang akurat, simulasi MCG jauh lebih efisien dari segi waktu dan dari segi banyaknya simulasi yang diperlukan dibandingkan dengan simulasi MCB.

Untuk memperlihatkan kekonvergenan solusi yang diperoleh dari kedua simulasi, berikut grafik perubahan harga opsi *put* Asia dengan rataan aritmetik



Gambar 1 Grafik perubahan harga opsi *put* Asia terhadap banyak simulasi

terhadap banyaknya simulasi n.

Gambar 1 menunjukkan harga opsi *put* Asia dengan rataan aritmetik dari hasil penghitungan simulasi MCB dan MCG. Masing-masing simulasi ditunjukkan dengan garis yang berbeda.

Grafik harga opsi pada Gambar 1 memperlihatkan bahwa semakin banyak simulasi yang dilakukan, masing-masing simulasi memberikan hasil yang konvergen ke solusi analitiknya. Simulasi MCG menghasilkan nilai *error* yang lebih kecil daripada nilai *error* yang dihasilkan simulasi MCB. Nilai *error* yang dihasilkan berhubungan dengan varian. Nilai varian dari hasil simulasi MCG lebih kecil daripada nilai varian dari hasil simulasi MCB. Simulasi numerik dengan menggunakan *control variate* menghasilkan varian yang lebih kecil daripada varian yang diperoleh tanpa menggunakan *control variate*. Hal ini karena *control variate* berfungsi mereduksi varian. Dengan semakin mengecilnya nilai varian, maka diperoleh interval kepercayaan yang semakin menyempit sehingga solusi yang diperoleh lebih cepat mendekati solusi analitiknya.

7 ILUSTRASI PENGGUNAAN OPSI ASIA

Andaikan pada bulan Mei 2016, kelompok petani Agritani di Kota Serang mulai menanam benih jagung pipilan. Kebutuhan jagung pipilan untuk pakan ternak di Kota Serang tahun 2016 diperkirakan sebanyak 1.5 juta ton. Sedangkan produksi jagung pipilan di Kota Serang hanya mencapai 400,000 ton. Untuk memenuhi kekurangan tersebut, pemerintah Kota Serang mengimpor dari Thailand dan India. Namun, karena kekhawatiran petani Agritani akan merosotnya harga jagung pipilan lokal dengan adanya impor, mereka mengajukan pembelian opsi *put* Asia dengan rataan aritmetik kepada pemerintah. Merespon hal ini, pemerintah mengeluarkan opsi Asia dan memberikan hak kepada petani untuk menjual jagung pipilannya sebanyak 1,000 kg seharga Rp 7,600/kg dengan periode opsi selama 3 bulan. Harga jagung pipilan pada awal periode opsi sebesar Rp 7,500/kg. Tingkat bunga bebas risiko sebesar 7.5%. Akan dibandingkan pendapatan petani dengan penggunaan opsi dan tanpa opsi.

Dari permasalahan diperoleh $S(0) =$ Rp 7,500/kg, $K =$ Rp 7,600/kg, $r =$ 7.5%, dan $T = \frac{4}{12}$ tahun. Simulasi yang digunakan adalah MCG dengan $n =$ 300,000. Dari hasil perhitungan, diperoleh harga opsi *put* Asia sebesar Rp 96.669/kg. Sehingga harga opsi untuk 1,000 kg jagung pipilan adalah Rp 96,669.

Tabel 3
Keuntungan petani dengan opsi dan tanpa opsi

Harga jagung pipilan	Keuntungan	
	Dengan opsi	Tanpa opsi
$S(T) < K$	$1{,}000K - 96{,}669 = 7{,}503{,}331$	$1{,}000S(T)$
$S(T) \geq K$	$1{,}000S(T) - 96{,}669$	$1{,}000S(T)$

Dari Tabel 3 dengan penggunaan opsi, ketika harga jagung pipilan di pasar pada akhir periode opsi $S(T)$ lebih rendah dari harga *strike* K, petani akan lebih untung jika menjual jagung pipilan pada opsi. Hal ini berarti petani akan mengeksekusi opsi dengan menjual 1,000 kg jagung pipilan sebesar $1{,}000K$ dan memperoleh pendapatan sebesar Rp 7,600,000. Keuntungan yang diperoleh sebesar Rp 7,503,331 yang merupakan selisih pendapatan dengan harga opsi. Namun, jika $S(T)$ lebih tinggi dari K, petani akan lebih untung menjual di pasar, dan berhak untuk tidak mengeksekusi opsi. Jika hal ini terjadi, maka petani hanya akan rugi sebesar harga opsi. Keuntungan diperoleh dari selisih harga di pasar dengan harga opsi.

Jika tanpa opsi, petani akan menjual jagung pipilan di pasar ketika harga tinggi ataupun rendah. Keuntungan diperoleh dari pendapatan tanpa dikurangi harga opsi.

Keuntungan yang diperoleh dengan penggunaan opsi bisa lebih rendah atau lebih tinggi daripada keuntungan tanpa penggunaan opsi. Namun, dengan penggunaan opsi, keuntungan yang pasti diperoleh petani adalah kepastian harga jual. Dengan memperoleh kepastian harga jual, petani dapat mengambil keputusan apabila menggunakan opsi maka pendapatan yang diperoleh dapat menutupi modal yang telah dikeluarkannya. Hal ini dapat meminimalisir kemungkinan kerugian yang dialami oleh petani di masa mendatang. Oleh karena itu, opsi cukup bermanfaat bagi petani sebagai alternatif dalam meminimalisir risiko ketidakpastian harga jual komoditas.

8 SIMPULAN

Dari hasil simulasi numerik, penggunaan *control variate* dalam simulasi Monte Carlo dapat mengurangi nilai *error* secara signifikan dibandingkan tanpa *control variate*. Dengan semakin rendahnya nilai *error*, maka solusi yang didapat lebih cepat mendekati solusi analitiknya. Hal ini berarti penggunaan metode *control variate* sangat penting dalam meningkatkan efisiensi simulasi Monte Carlo dalam menaksir nilai opsi yang tidak memiliki solusi analitik.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Dingec KD. 2013. *Option Pricing By Simulation* [disertasi]. Istanbul (TR): Bogazici University

[2] Glasserman P. 2003. *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*. New York (US):Springer.

[3] Gregory WC, Dale IF. 2009. *Nonparametric Statistics for Non-Statisticians*. New Jersey (US): John Wiley & Sons Inc.

[4] Hull J. 2009. *Option, Future and Other Derivatives*. 7th ed. Amerika Serikat (US): Pearson Education Inc.

[5] [Pusdatin] Pusat Data dan Sistem Informasi Pertanian. 2015. Statistik Harga Komoditas Pertanian Tahun 2015. Jakarta (ID): Pusdatin.